### Түсінік хат

Бұл бағдарлама жалпы білім беретін мектептің 9-11-сынып оқушыларына арналған. Курс осы пәнді тереңдетіп оқыту бағдарламасына негізделген және білім алушыларға мектеп оқушыларының математикалық дайындығына жоғары талаптар қойылатын мемлекеттік емтихандарға, ұлттық бірыңғай тестілеуге дайындалуға көмектеседі.

Ықтималдық теориясы негіздері жалпы білім берудің мемлекеттік білім беру стандарттарының компонентіне енгізілген.

### Курстың мақсаты:

* математиканың негізгі бөлімдерімен бірге математикаға бейім оқушылардың қызығушылықтарын қанағаттандыру және қабілеттерін дамыту үшін негіз құру;
* негізгі курстың мазмұндық олқылықтарын толтыру, тереңдетіп оқыту мазмұнына қажетті тұтастық беру.

### Курстың міндеттері:

* Білім беру перспективасы тұрғысынан оқушылардың өз мүмкіндіктерін бағалауын қалыптастыру және дамыту; меңгеруге дайындығы мен қабілетін нақтылау, Ықтималдық теориясы негіздері бойынша есептерді шығару саласындағы интеллектуалдық және практикалық дағдыларды дамыту;
* Әртүрлі жағдайларда білімді өз бетінше алу және қолдану қабілетін дамыту;
* Оқушылардың шығармашылық қабілеттерін дамыту.
* Студенттердің пәнге деген тұрақты қызығушылығын қалыптастыру, олардың математикалық қабілеттерін анықтау, математикаға байланысты мамандықтарға бағдарлау, ЖОО-да оқуға дайындау.

Курстың мазмұны білім алушыларды өз бетінше дайындауды, әртүрлі ақпарат көздерімен (анықтамалар, оқу және басқа әдебиеттермен) жұмыс істеуді көздейді.

Курста негізінен практикалық материалдар бар. Есептерді шешу үшін сәйкес теоремаларды немесе формулаларды түсіну жеткілікті болғандықтан, негізгі теориялық ақпарат пен формулалар дәлелсіз беріледі.

Мұқият таңдалған және шешілген типтік мысалдар мен есептерінің көптігі теорияны терең түсінуге ықпал етеді. Курста өздік жұмыс тапсырмалары, ұсынылған материалдардың игерілуін тексеруге мүмкіндік беретін тесттер қарастырылған.

### Күтілетін нәтижелер:

Курсты оқу нәтижесінде білім алушылар білуі керек:

* кездейсоқ, ақиқат және мүмкін емес оқиғаларды түсіну және ажырату, оқиғаларды біріктіру және қиылысу есептерін шешу;
* есептерді шығару кезінде комбинаториканың жалпы ережелерін қолдану;
* факториалды қамтитын мысалдардағы әрекеттерді орындау, қайталанбайтын іріктеу, қайталанбайтын біріктіру, қайталанбайтын ауыстыру, қайталанбайтын орналастыру ұғымдарына типтік мысалдар

жүргізу, зерттелген формулаларды есептер шығаруда қолдану және Ньютонның биномдық формуласын қолданып есептер шығара білу;

* ықтималдықтың классикалық және геометриялық анықтамаларын есептер шығаруда қолдану;
* қарапайым есептерді шығаруда екі оқиғаның қиылысу ықтималдығының формулаларын, толық ықтималдық формуласын қолдану.
* комбинаториканың жалпы ережелерін, факториалды анықтауды, таңдауды анықтауды, комбинацияны, орналастыруды, қайталанбайтын ауыстыруды, Ньютон биномдық формуласын;
* ықтималдықтың классикалық және геометриялық ұғымдарының анықтамалары, бірлескен және үйлеспейтін оқиғалардың анықтамалары; шартты ықтималдық, үйлеспейтін оқиғаларды біріктіру формулалары, бірлескен оқиғаларды біріктіру, екі оқиғаның қиылысу ықтималдығы, толық ықтималдық формуласы.

Ақпараттық–әдістемелік бөлім

Бұл авторлық бағдарлама жоғарыдағы түсінік хатта айтылғандай мақсаттар мен міндеттерді жүзеге асыруға бағытталған. Бағдарламадағы тарауларға орай алынған тақырыптар білім беру стандартына сай игеруге тиіс материалдарды қамтиды. Ал осы тақырыпты толық меңгеруге функционалдық сауаттылыққа бағытталған тапсырмалар көмектеседі.

Блім алушының білімін жұмысын бағалауда төмендегідей критерийлерге мән беріледі:

* Оқушы теориялық ақпаратты түсінеді, есептер шығара алады;
* тиісті формулаларды жатқа біледі;
* Тақырыптарды толық меңгерген, өмірде қолдана алады;
* Математикалық сауаттылық есептерін шешуде алған білімін қолдана алуы;

Күнтізбелік-тақырыптық жоспарлау

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Мазмұны** | **Сағат саны** | **Күні** | **Ескерту** |
|  | ***ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ ЭЛЕМЕНТТЕРІ*** |  |  |  |
| 1 | Оқиғалар | 1 |  |  |
| 2 | Тәжірибелер және олардың нәтижелері | 1 |  |  |
| 3 | Қарама қарсы оқиғалар | 1 |  |  |
| 4-5 | Оқиғаның ықтималдығы | 1 |  |  |
| 6 | Оқиғалардың ықтималдығы тақырыбы  бойынша қорытынды сабақ. | 1 |  |  |
| 7-8 | Ықтималдықтарды қосу | 1 |  |  |
| 9-  10 | Тәуелсіз оқиғалар | 1 |  |  |
| 11 | Ықтималдықтарды көбейту | 1 |  |  |
| 12 | Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремаларынан қорытынды | 1 |  |  |
| 13 | Статитикалық ықтималдық | 1 |  |  |
| 14 | Геометриялық ықтималдық | 1 |  |  |
| 15 | Геометриялық ықтималдық тақырыбы бойынша функционалдық сауаттылыққа бағытталған тапсырмалар | 1 |  |  |
| 16 | Оқиғалардың ықтималдығы тақырыбы бойынша қорытынды сабақ. | 1 |  | Өзіндік жұмыс |
|  | ***КОМБИНАТОРИКА*** |  |  |  |
| 17 | Комбинаторика ережелері | 1 |  |  |
| 18-  19 | Орналастыру | 1 |  |  |
| 20 | Қайталанбалы орналастыру | 1 |  |  |
| 21 | Алмастыру | 1 |  |  |
| 22 | Қайталанбалы алмастыру | 1 |  |  |
| 23 | Теру және оның қасиеті | 1 |  |  |
| 24 | Қайталанбалы терулер | 1 |  |  |
| 25 | Ньютон биномы | 1 |  |  |
| 26 | Паскаль үшбұрышы | 1 |  |  |
| 27 | «Комбинаторика» тақырыбы бойынша қорытынды сабақ | 1 |  | Өзіндік жұмыс |
|  | ***Статистика*** |  |  |  |
| 28 | Жалпы және таңдамалы жиынтық | 1 |  |  |
| 29 | Вариациялық қатар | 1 |  |  |
| 30-  31. | Статистикалық мәліметтердің графикалық көрінісі. | 1 |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 32 | Эмпирикалық таралу функциясы | 1 |  |  |
| 33 | Таңдаманың негізгі сандық сипаттамалары | 1 |  |  |
| 34 | Таңдаманың қосымша сандық сипаттамалары | 1 |  |  |
| 35 | Таңдаманың сандық сипаттамаларын есептеу | 1 |  |  |
| 36 | Статистика тақырыбы бойынша қорытынды  Саб | 1 |  | Өзіндік  жұмыс |
|  | Жалпы сағат саны | 36 |  |  |

Авторлық бағдарлама мазмұны

#### ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

* 1. ***Оқиғалар***

Ықтималдықтар теориясы – кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математикалық ғылым.

Оқиға – кез келген тәжірибені немесе экспериментті жүзеге асыру нәтижесінде пайда болатын құбылыс.

Оқиғаның түрлері

* Ақиқат
* Кездейсоқ
* Мүмкін емес

Кездейсоқ - нәтижесін алдын ала болжауға болмайтын оқиға. Мысалдар:

1. Тиын лақтырғанда «Елтаңба» жағы түсті.
2. Таңертең жаңбыр жауады.
3. Қоңырауға сары такси келді
4. Үйдің бірінші қабатында дүкен бар
5. Сабақ кестесінде математика төртінші сабақта болады. Ақиқат оқиға – берілген шарттарда әрқашан болатын оқиға. Мысалдар:
6. Күзден кейін қыс келеді.
7. Сәрсенбіден кейін бейсенбі болады.
8. Ойын сүйектерді лақтырған кезде 6 ұпайдан аспайды.
9. 6 ақ шары бар урнадан ақ шарды аласыз.
10. Қыздырғанда судың температурасы көтеріледі

Мүмкін емес – берілген шарттарда болуы мүмкін емес оқиға. Мысалдар:

1. Сәрсенбіден кейін дүйсенбі келеді.
2. Алма шыршада өседі.
3. 30 ақпан.
4. 5 қыздың ішінен ұл таңдау. Есептер:
5. Себетте 3 қызыл, 3 сары алма болды. Қаптан кездейсоқ алма суырылады.

Келесі оқиғалардың ішінде кездейсоқ, белгілі, мүмкін емес оқиғаларды көрсетіңіз.

A: Қызыл алма суырылды (кездейсоқ) С: Сары алма суырылды (кездейсоқ)

C: Жасыл алма суырылды (мүмкін емес) D: Алма суырылды (ақиқат)

1. Төмендегі оқиғалардың қайсысы кездейсоқ; ақиқат; мүмкін емес? А) тасбақа сөйлеуді үйренеді; (мүмкін емес)
2. сіздің туған күніңіз 19 қазан; (кездейсоқ)
3. досыңның туған күні 30 ақпан; (мүмкін емес)
4. лотереяға қатыссаңыз ұтасыз; (кездейсоқ)
5. Лотереяға қатысу арқылы ұтылмайсыз; (мүмкін емес)

E) сіз шахмат ойынынан ұтыласыз; (кездейсоқ)

G) ертең бөгде адамды кездестіресіз; (мүмкін емес)

C) келесі аптада ауа райы нашарлайды; (кездейсоқ)

И) сен қоңырауды бастың, бірақ ол соғылмады; (кездейсоқ)

1. бүгін бейсенбі; (кездейсоқ)
2. бейсенбіден кейін жұма болады; (ақиқат) М) Шырша – мәңгі жасыл ағаш; (ақиқат)

H) Ертең мен ғарышкер боламын; (кездейсоқ).

#### Тәжірибелер және олардың нәтижелері

Тәжірибе – объектілерді немесе құбылыстарды қатаң белгіленген шарттарда бақылау және осы объектілердің (құбылыстар) алдын ала анықталған белгілерінің мәндерін өлшеу.

Кездейсоқ эксперимент (тәжірибе, сынақ) - нәтижесі алдын ала белгілі болмайтын қандай да бір әрекет. Кездейсоқ эксперименттің болжамды нәтижелері кездейсоқ оқиғалар немесе кездейсоқ нәтижелер деп аталады («кездейсоқ» сөзі жиі қабылданбайды).

Кездейсоқ эксперимент пен оқиғаның мысалдары: сүйек лақтыру және

«жұп санды айналдыру»; үш тиын лақтыру және «кем дегенде бір рет бас»; палубадан екі ойын картасын шығару және «бірінші карта сандық, екінші сурет».

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тәжірибе | *А оқиғасы* | *А* оқиғасы |
| Нысанаға үш рет ату | Екі реттен артық емес нысанаға дәл тию | Нынасанға үшеуі де дәл тию |
|  | Кем дегенде екі рет нысанаға дәл тию | Нысанаға дәл бір рет тию |
| Ақ және қара шарлар бар қораптан екі шар алынады. | Бір түсті екі шар алынды | Әртүрлі түстен екі шар алынды |

Егер оқиғалардың біреуінің пайда болуы берілген тәжірибеде басқалардың болуын жоққа шығарса үйлесімсіз деп аталады. Кейбір тәжірибенің нәтижесі болып табылатын бірнеше үйлеспейтін оқиғалар, егер олардың кем дегенде біреуі сынақ нәтижесінде орын алса, оқиғалардың толық тобын құрайды.

1 есеп:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тәжірибе | Элементар | Элементарлы нәтижелер |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | оқиғалар | кеңістігі |
| а) бір тиын лақтыру б) екі тиын лақтыру | Е = {Елтаңба шығуы }  С = {Сан шығуы} | а) W = {Е, С}  б) W = {ЕЕ, СС, ЕС, СЕ} |
| Шахмат ойынының нәтижесі | Ж = {жеңіс} Х = {Жеңіліс} Т = {тең} | W = {Ж, Х, Т} |
| Студенттің емтихан тапсыруы | «5» = { 5 алу}  «4» = { 4 алу}  «3» = { 3 алу}  «2» = { 2 алу} | W = {«5», «4», «3», «2»} |

#### Қарама қарсы оқиғалар

Лотереядағы «ұту» және «ұтылу» оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар. Анықтама: А� оқиғасы (А сызығы бар немесе А емес) оқиғасы болған кезде,

А оқиғасы болмаған кезде А оқиғасына қарама-қарсы оқиға деп аталады.

Міне, бірнеше мысалдар келтірейік:

1. лотереяда «ұту» және «ұтылу»;
2. тиынды бір лақтыру нәтижесінде «Елтаңба беті түсуі» және «Сан бетінің тұсуі»;
3. ойын сүйегін лақтыру нәтижесінде «екі шығырдың пайда болуы» және

«екі емес кісеннің пайда болуы» (яғни, не 1, не 3, не 4, не 5, немесе 6 болуы);

1. рулетка дөңгелегін айналдыру нәтижесінде «көрсеткінің 4-секторға тоқтауы » және «көрсеткінің 4-сектордан басқа секторға тоқтауы».

Егер В оқиғасы А оқиғасына қарама-қарсы болса, яғни В = А� болса, онда

А оқиғасы В оқиғасына қарама-қарсы: A = В�. Сондықтан А және А� оқиғалары өзара қарама-қарсы немесе бірін-бірі толықтырушы деп аталады.

Қарама-қарсы оқиғаларға мысалдар келтірейік.

1) Келесі кездейсоқ оқиғаларды қарастырамыз:

Ойын сүйегін лақтырғанда

A = {ұпайлардың жұп саны шығады}, B ={алты шығады},

C ={үштен аз сан шығады}.

Олардың әрқайсысын қолайлы нәтижелер жиынтығы ретінде жазуға болады:

A = {2, 4, 6}, B = {6}, C = {1,2}.

Қарама-қарсы оқиғалар болады:

А� = {ұпайлардың тақ саны түседі},

В� = {алтыдан басқа сан түседі},

С� = { үштен үлкен немесе тең сан шығады }, және қосымша жиындармен -

А� = {1,3,5}, В� = {1,2,3,4,5}, С� = {3,4,5,6}.

Бір-біріне қарама-қарсы оқиғалар бір уақытта бола алмайды, бірақ олардың біреуі болуы керек. Сондықтан

Р(А) + Р(А�) = 1.

Басқаша айтқанда, өзара қарама-қарсы оқиғалардың ықтималдығының қосындысы бірге тең.

Сәйкесінше, Р(А�) = 1 – Р(А) және Р(А) = 1 – Р(А�).

Бұл формулалардан P(A) есептеу үшін Р(А�)білу жеткілікті екендігі шығады.

Мысал:

Екі ойын сүйегін лақтырғанда олардың әртүрлі (бірдей емес) ұпай саны алу ықтималдығы қандай?

Шешуі:

A ={ әр түрлі ұпайлар түсті} болсын, онда А�= { бірдей ұпай саны түсті}.

А� оқиғасы алты элементар оқиғамен қолайлы: (1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6).

Осы қарапайым оқиғалардың әрқайсысының ықтималдығы, біз білетіндей,

1 .

36

Сәйкесінше, Р(А�) = 6

36

= 1.

6

Онда Р(А) = 1 – Р(А�) **=** 1 **-** 𝟏𝟏 **=** 𝟓𝟓**.**

𝟔𝟔 𝟔𝟔

Оқиғалар арасындағы байланыстар мен қатынастарды схемалық сызбалар арқылы бейнелеуге болады. Мұндай сызбаларды Эйлер диаграммасы деп атайды.

Тіктөртбұрыш барлық элементар оқиғаларды көрсетсін. А оқиғасы тіктөртбұрыштың ішіндегі шеңбер түрінде бейнеленген (1-сурет). Бұл жағдайда тіктөртбұрыштың қалған бөлігі А оқиғасына қарама-қарсы А� оқиғасын бейнелейді.

Сурет 1 *Оқиғалар ықтималдығының көрінісі*

Суретте Эйлер диаграммасы арқылы екі оқиға бейнеленген: А оқиғасы және оған қарсы А� оқиғасы.

Егер сізге бірнеше оқиғаны бейнелеу қажет болса, онда бірнеше фигураны салыңыз - әр оқиға үшін біреуін. Сонымен қатар, бұл оқиғалардың бір- бірімен байланысын көрсететін сандарды әртүрлі тәсілдермен орналастыруға болады.

Тапсырмалар:

1. Кездейсоқ экспериментте 20 элементар оқиға бар. Олардың 12-сі А оқиғасын жақсы көреді. А� оқиғасына қанша элементар оқиға қолайлы. (8)
2. Кейбір кездейсоқ тәжірибеде К оқиғасы орын алуы мүмкін.К оқиғасының ықтималдығы К� ықтималдығын табыңыз, егер К оқиғасының ықтималдығы мынаған тең болса:

а) 0,4; ә) 0,85; б) 0,13; в) 1.

2

1. Қорапта 3 ақ, 4 қара және 5 қызыл шар бар. Кездейсоқ тартылған

шардың ақ болмауының ықтималдығы қандай?

1. Монета 6 рет лақтырылды. А оқиғасы нәтижелердің ішкі жиыны ретінде жазылады:

А = {ОРОРОР, РОРОРО}. Р(А�) ықтималдығын табыңыз.

1. Мектептегі ғылыми қоғамда 10 адам бар: 7 ұл және 3 қыз. Қалалық конференцияға қоғам мүшелерінен кездейсоқ екі студент таңдалады. Таңдалған екі адамның ішінде кем дегенде бір қыздың болу ықтималдығы қандай?

#### 4-5. Оқиғаның ықтималдығы

Ықтималдық - ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарының бірі. Жүріп жатқан сынақты сипаттау үшін сіз осы немесе басқа сынақтың нәтижесінде не болатынын білуіңіз керек. Сынақ нәтижесінде толық топты құрайтын оқиғалар орын алуы мүмкін барлық нәтижелерді құрайды.

Анықтама: Сынақ нәтижесінде болуы мүмкін әрбір оқиға элементар нәтиже деп аталады.

Және өз кезегінде:

Анықтама: Берілген оқиғада орын алатын элементарлық нәтижелер осы оқиғаға қолайлы нәтижелер деп аталады.

Ойын сүйегі мысалына қайта оралайық. Мысалы, ойын сүйегін лақтырғанда, үстіңгі жағында жұп сан пайда болады.

Шешімі:

Өзімізге сұрақ қояйық:

Сүйектерді лақтырудың қандай нұсқалары бар?

-Ол түсуі мүмкін: 1 немесе 2, немесе 3, немесе 4, немесе 5, немесе 6. Сынақ кезінде болуы мүмкін барлық ықтимал оқиғалар элементар нәтижелер деп аталады.

Сұрақ:

- Біздің іс-шараның нәтижесі қандай болды?

-Бұл тек жұп сандар: 2 немесе 4 немесе 6. Бұл нәтижелер біздің оқиға үшін қолайлы нәтижелер деп аталады.

Бұл жерде: «Жұп ұпай алу ықтималдығы қандай?» Деген сұрақ туындайды.

Бұл мүмкіндікті санмен сипаттауға бола ма?

Болады. Бұл сан оқиғаның ықтималдығы деп аталады.

Сонымен, ықтималдық дегеніміз оқиғаның пайда болу мүмкіндігінің дәрежесін сипаттайтын сан. Ұпайлардың жұп санының түсу мүмкіндігін сандық түрде анықтайық.

Ұпайлардың жұп санының пайда болуы А оқиғасы ретінде қарастырылады. Әрбір ықтимал нәтиже, яғни 1 немесе 2, немесе 3, немесе 4, немесе 5 немесе 6, алты элементар нәтиже шығуы мүмкін, олар толық топты құрайды. Бізді қызықтыратын оқиға орын алатын және қолайлы оқиға болып табылатын элементарлы оқиғалар (нүктелердің жұп санының пайда болуы), яғни 2 немесе 4 немесе 6.

А оқиғасына қолайлы элементар нәтижелердің олардың қарапайым нәтижелердің жалпы санына қатынасы А оқиғасының ықтималдығы деп аталады және P(A) арқылы белгіленеді.

Біздің мысалда 6 элементар нәтиже және біздің оқиғаға қолайлы 3 нәтиже бар. Сондықтан ұпайлардың жұп санының түсу ықтималдығы.

𝑃(𝐴) =

3 1

= = 0,5

6 2

Бұл сан біз тапқымыз келген ұпайлардың жұп санының мүмкін болу дәрежесінің сандық бағасын береді.

Оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасы:

А оқиғасының ықтималдығы – осы оқиғаға қолайлы нәтижелер санының толық топты құрайтын барлық бірдей мүмкін болатын үйлеспейтін элементар нәтижелердің жалпы санына қатынасы.

𝑃(𝐴) = 𝑚,

𝑛

Мұнда 𝑚𝑚 – А оқиғасына қолайлы элементар нәтижелер саны.

𝑛𝑛 - барлық мүмкін болатын элементар сынақ нәтижелерінің саны. Қасиеттері:

1° Белгілі бір оқиғаның ықтималдығы бір P(A)=1-ге тең. 2° Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы нөлге тең P(A)=0.

3° Кездейсоқ оқиғаның ықтималдығы нөл мен бір 0<P(A)<1 арасындағы оң сан.

Салдары: Кез келген оқиғаның ықтималдығы 0≤P(A)≤1 теңсіздігін қанағаттандырады.

Тапсырмалар:

* 1. Ойын сүйегі бір рет лақтырылады. Бес ұпайдан кем түсу ықтималдығын табыңыз?
  2. Алмас, Жандос, Нұржан, Қайрат және Марат ойынды кімнен бастауға жеребе тастады. Мараттың ойынды бастау ықтималдығын табыңыз?
  3. Телефон пернетақтасында 0-ден 9-ға дейін 10 цифр бар. Кездейсоқ басылған санның тақ болу ықтималдығы қандай?
  4. Сатушы әкелінген тоқаштарды санап қараса, шие салмасы бар 20 тоқаш, таңқурай салмасы бар 24 тоқаш, мейіз салмасы бар 15 тоқаш, шоколад салмасы бар 16 тоқаш, қалған 5 тоқаш көкнәр тұқымы бар екен. Сатушы кездейсоқ бір тоқашты алып, витринаға қойды. Терезедегі тоқаштың таңқураймен толтырылуының ықтималдығы қандай?
  5. Емтиханда 20 билет бар, оның 5-іне студент дайындалмаған. Оның дайындалған билетін алу ықтималдығын табыңыз?
  6. Биіктікке секіру жарысына Франциядан 9, Италиядан 7, Австриядан 8, Швейцариядан 6 спортшы қатысуда. Спортшылардың жарыс реті жеребе арқылы анықталады. Екінші спортшының Франциядан болу ықтималдығын табыңыз.
  7. Екі ойын сүйегі лақтырылады. Домаланған нүктелердің қосындысы 4-тен кем болу ықтималдығын табыңыз.
  8. Сүйектер бір рет лақтырылады. Екі ұпайдан артық түсу ықтималдығын табыңыз?
  9. Сынып кезекшілері Олжас, Батыр, Салтанат және Айнұр тақтаны кім өшіру керектігін шешу үшін жеребе тастады. Қыздардың біреуінің тақтаны өшіру ықтималдығын табыңыз.
  10. Үстелде 10 карта бар, оған 1-ден 10-ға дейінгі сандар жазылған. Жанар кездейсоқ бір картаны тартады. Таңдалған картадағы санның 3-ке бөліну ықтималдығы қандай?

#### 6. Оқиғалардың ықтималдығы тақырыбы бойынша қорытынды

***сабақ.***

1. Зауытта жиналған 1000 теледидардың 5 данасы ақаулы. Сарапшы кездейсоқ таңдалған 1000 теледидардың біреуін тексереді. Тексерілген теледидардың ақаулы болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Теледидарды таңдау кезінде 1000 нәтиже болуы мүмкін, ал

«таңдалған теледидар ақаулы» А оқиғасының 5 қолайлы нәтижесі бар. Р(А) = 5÷1000 = 0,005 анықтау ықтималдығы. Жауабы: 0,005.

1. Урнада 9 қызыл, 6 сары, 5 жасыл шар бар. Урнадан кездейсоқ бір шар алынады. Бұл шардың сары болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Нәтижелердің жалпы саны шарлар санына тең: 9 + 6 + 5 = 20. Бұл оқиға үшін қолайлы нәтижелер саны 6. Қажетті ықтималдық 6÷20 = 0,3. Жауабы: 0,3.

1. Мақсат, Гүлзат, Жанар, Ғалымжан, Дархан, Дана қатар лақтырды - ойынды кім бастау керек. Бала ойынды түзетуге тура келетін ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Оқиғаның ықтималдығы қолайлы жағдайлардың барлық жағдайлардың санына қатынасына тең. Мақсат, Ғалымжан немесе Дархан ойынды бастағанда қолайлы оқиғалар саны 3, ал барлық оқиға 6. Сондықтан қажетті қатынас 3:6 = 0,5. Жауабы: 0,5.

1. Әлем чемпионатына 16 команда қатысуда. Жеребе тарту арқылы олар төрт командадан төрт топқа бөлінуі керек. Қорапта топ нөмірлері жазылған карточкалар бар: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Команда капитаны бір картаны тартады. Ресей құрамасының екінші топта болу ықтималдығы қандай?

Шешуі: А оқиғасы арқылы «Екінші топтағы Ресей құрамасын» белгілейік. Сонда қолайлы оқиғалардың саны m = 4 (2 саны бар төрт карта),

ал ықтималдығы бірдей оқиғалардың жалпы саны P = 4 ықтималдығының анықтамасы бойынша n = 16 (16 карта): 16 = 0,25. Жауабы: 0,25

1. Шаңғы жарысына Ресейден 11, Норвегиядан 6, Швециядан 3 спортшы қатысады. Спорттық шараның басталу реті анықталады. Ресейден емес спортшыларға не берілетіндігінің ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Жалпы спортшылар 11 + 6 + 3 = 20 адам. Сондықтан Ресейден 9:20 = 0,45 тең спорт түрін бастау өте маңызды. Жауабы: 0,45.

1. Әрбір 1000 электр шамына 5 ақау келеді. Жұмыс істейтін шамды сатып алу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Әрбір 1000 шамға 5 ақау бар, олардың биіктігі 1005. 1005 шам дұрыс шамдар саны бірдей болады, яғни 1000:1005=0,995 Жауабы: 0,995.

1. Туристер тобында 8 адам бар. Жеребе арқылы олар азық-түлік сатып алу үшін ауылға баруы керек алты адамды таңдайды. Топқа кіретін турист Досханның дүкенге бару ықтималдығы қандай? 6 : 8=0,75.
2. Футболдан 16 команда чемпионатқа қатысады, олар да 4 топқа бөлінеді: A, B, C және D. Ресей құрамасының А тобына түспеу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Әр команда 0,25 ықтималдығы бар топқа түседі. Осылайша, команданың топқа түспеу ықтималдығы 1-0,25 = 0,75. Жауабы: 0,75

1. Шахмат турниріне 26 қатысушы келді, оның ішінде Алмат пен Марат бар. Бірінші турдың жеребесі үшін қатысушылар кездейсоқ түрде 13 адамнан екі топқа бөлінді. Алмат пен Мараттың әртүрлі топқа түсу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Барлығы 26 орын бар. Алмат кез келген топта кездейсоқ орын алсын. 25 орын қалады, оның 13-і басқа топта. Маратқа орын таңдауды нәтиже деп санаймыз. Қолайлы нәтижелер 13. Р=13/25 = 0,52. Жауабы: 0,52

1. Сыныпта 16 оқушы бар, олардың арасында екі дос – Батыр мен Бақыт бар. Оқушылар кездейсоқ түрде 4 бірдей топқа бөлінеді. Батыр мен Бақыттың бір топта болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Бірінші болып Бақыт орын алса, Батырда 15 орын қалды. Оның

3-і Бақытпен бір топта. Қажетті ықтималдық 3/15. Жауабы: 0,2

1. Сыныпта 21 оқушы бар, олардың арасында екі дос – Дарын мен Дархан бар. Сынып кездейсоқ 3 бірдей топқа бөлінеді. Дарын мен Дарханның бір топта болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Достардың бірі топта болсын. Онымен бірге қалған 20 студенттің 6 адамы топта болады. Осы 6 адамның арасында дос болу ықтималдығы 6 : 20 = 0,3. Жауабы: 0,3

1. Үстел теннисі бойынша чемпионаттың бірінші кезеңі басталғанға дейін қатысушылар жеребе тарту арқылы кездейсоқ түрде ойын жұптарына бөлінеді. Чемпионатқа барлығы 16 спортшы қатысуда, оның ішінде Қазақстаннан 7 қатысушы, оның ішінде Асылжан Манапов бар. Бірінші айналымда Асылжан Манаповтың Қазақстанның кез келген спортшысымен ойнау ықтималдығын табыңыз? 6:15=0,4. Жауабы: 0,4.
2. Дойбы чемпионатының бірінші туры басталғанға дейін қатысушылар жеребе тарту арқылы кездейсоқ түрде ойын жұптарына

бөлінеді. Чемпионатқа барлығы 26 дойбышы қатысады, оның ішінде Көкшетаудан 3 қатысушы, оның ішінде Ұлан Батыров бар. Бірінші айналымда Ұлан Батыровтың Көкшетаудан келген дойбышымен ойнау ықтималдығын табыңыз? 2: 25=0,08. Жауабы: 0,08.

1. Сыныпта 26 оқушы бар, олардың арасында екі дос – Самат пен Қанат бар. Оқушылар кездейсоқ түрде 2 бірдей топқа бөлінеді. Самат пен Қанаттың бір топта болу ықтималдығын табыңыз. Жауап 12: 25 = 0,48.
2. Сыныпта 21 оқушы бар, оның ішінде 2 дос – Жанат пен Ахан. Дене шынықтыру сабағында сынып кездейсоқ 3 бірдей топқа бөлінеді. Жанат пен Аханның бір топта болу ықтималдығын табыңыз. Жауап 6: 20 = 0,3.
3. Сыныпта 21 оқушы бар, олардың арасында екі дос - Анар мен Шұға бар. Сынып кездейсоқ түрде әрқайсысы 3 адамнан жеті топқа бөлінеді. Анар мен Шұғаның бір топта болу ықтималдығын табыңыз. Жауабы: 2:20 = 0,1.
4. Он екі сағаттық циферблатты механикалық сағат бір сәтте істен шығып, жұмысын тоқтатты. Сағат тілі 7-ге жеткенде тоқтап, бірақ 1-ге жетпей қалу ықтималдығын табыңыз. Жауап. 6 : 12= 0,5 (12 мен 7 арасындағы 6 бөлім, барлығы 12 бөлім)
5. Он екі сағаттық циферблатты механикалық сағат бір сәтте істен шығып, жұмысын тоқтатты. Сағат тілі 9-да емес, сағат 6-да қатып қалу ықтималдығын табыңыз. 3:12 = 0,25

#### 7-8. Ықтималдықтарды қосу

А және В екі оқиғаның қосындысы А+В оқиғасы деп аталады. Бұл не В оқиғасы, не А оқиғасы немесе екеуі де бір уақытта орын алуы мүмкін. Оқиғалар үйлесімсіз болса, соңғысы мүмкін емес, сондықтан B оқиғасы немесе А оқиғасы орын алуы мүмкін.

Формуласы:

*Р*( *А*  *В*)  *P*( *A*)  *P*(*B*)

Бұл ереже құрамдастардың үлкен санына қолданылуы мүмкін. Мысалы, оқиға осы оқиғалардың бірі болуы мүмкін. Оқиғалар үйлесімсіз болса, онда бұл санның ішінде бір ғана оқиға орын алуы мүмкін: оқиға, немесе, т.б.

Ойын сүйегі мысалы:

Ойын сүйегін лақтырамыз. Төрттен кіші санның шығу ықтималдығы қандай?

Төрттен кіші сандар 1,2,3. Біз 1 алу ықтималдығы 1/6, 2 - 1/6 және 3 - 1/6 екенін білеміз. Бұл үйлеспейтін оқиғалар. Біз қосу ережесін қолдана аламыз. Төрттен кіші санды алу ықтималдығы:

1  1  1  1  0,5

6 6 6 2

Шынында да, егер классикалық ықтималдық тұжырымдамасынан шығатын болсақ: онда ықтимал нәтижелер саны 6 (текшенің барлық беттерінің саны), қолайлы нәтижелер саны 3 (бір, екі немесе үш). Қажетті ықтималдық 3-тен 6- ға дейін немесе 3/6 = 0,5.

\* Екі бірлескен оқиғаның қосындысының ықтималдығы олардың бірлескен пайда болу ықтималдығын есепке алмағанда осы оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысына тең:

*Р*( *А*  *В*)  *P*( *A*)  *P*(*B*)  *P*( *AB*)

Тапсырмалар:

1. Дүкен төрт қоймадан жәшік алды: төртеуі 1-ден, бесеуі 2-ден, жетеуі 3-шіден, төртеуі төртіншіден. Сатуға арналған кездейсоқ таңдалған қораптың бірінші немесе үшінші қоймадан болу ықтималдығы қандай.
2. Қорапта 10 қызыл және 6 көк түйме бар. Екі түйме кездейсоқ алынды. Олардың бір түсті болу ықтималдығы қандай?
3. Геометрия емтиханында студент жинақтан бір есеп алады. Бұл тапсырманың «Бұрыштар» тақырыбы бойынша болу ықтималдығы 0,1. Ал

«Параллелограмм» тақырыбы бойынша тапсырма болу ықтималдығы 0,6. Жинақта осы екі тақырыпқа бір мезгілде қатысты мәселелер жоқ. Емтиханда студенттің осы екі тақырыптың біреуі бойынша есеп шығару ықтималдығын табыңыз.

1. Оқушы Олжастың биологиядан тест бойынша 11-ден астам тапсырманы дұрыс орындау ықтималдығы 0,67. Олжастың 10-нан астам тапсырманы дұрыс орындау ықтималдығы 0,74. Олжастың дәл 11 тапсырманы дұрыс орындау ықтималдығын табыңыз.
2. Геометрия емтиханында студент емтихан сұрақтарының тізімінен бір сұрақ алады. Бұл сызылған дөңгелек сұрақ болу ықтималдығы 0,2. Бұл параллелограмм сұрағы болу ықтималдығы 0,15. Бұл екі тақырыпқа бір мезгілде қатысты сұрақтар жоқ. Студенттің емтиханда осы екі тақырыптың біреуі бойынша сұрақ алу ықтималдығын табыңыз.

#### 9-10. Тәуелсіз оқиғалар

Біз мысалдар арқылы P(A) және

PB (A)

сандары, жалпы айтқанда, әртүрлі

екенін көрдік; басқаша айтқанда, В оқиғасының пайда болуы А оқиғасының ықтималдығын өзгерте алады. Осыған байланысты келесі анықтама енгізіледі.

*Анықтама*. Теңдік болған жағдайда А оқиғасы В -ға тәуелді емес дедік

PB (A)  P(A)

Осылайша, егер В оқиғасының пайда болуы А ықтималдығына әсер етпесе (немесе қарапайымырақ айтқанда, В оқиғасының пайда болуы А-ның мүмкіндіктерін өзгертпесе) А оқиғасы В оқиғасынан тәуелсіз.

* Оқиғалардың тәуелсіздігі тұжырымдамасы ықтималдықтар теориясындағы орталық ұғымдардың бірі болып табылады.

Мына теңдіктен

*P*( *AB*)  *PB* ( *A*)*P*(*B*)

енді мынадай қорытынды шығаруға болады:

Егер А оқиғасы В оқиғасына тәуелді болмаса, онда теңдік

*P*( *AB*)  *P*( *A*)*P*(*B*)

Мысал:

Тұтынушылардың пікірлері бойынша, Арман Асқарұлы екі интернет- дүкеннің сенімділігін бағалады. Қажетті өнімнің А дүкенінен жеткізілу ықтималдығы 0,81. Бұл өнімнің В дүкенінен жеткізілу ықтималдығы 0,93. Арман Асқарұлы екі дүкенде бірден тауарға тапсырыс берді. Интернет- дүкендер бір-бірінен тәуелсіз жұмыс істейді деп есептей отырып, дүкендердің ешқайсысы тауарды жеткізбеу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі:

Біз екі оқиғаны бөліп көрсетеміз: A – тауар А дүкенінен жеткізілмеді, В

– тауар В дүкенінен жеткізілмеді. Дүкендер бір-бірінен тәуелсіз жұмыс

істейтіндіктен, А және В оқиғалары тәуелсіз. Бұл оқиғалардың өнімі *C*  *A*  *B*

оқиғасы болып табылады, бұл А дүкенінен де, В дүкенінен де тауар жеткізілмейтінін білдіреді. Бұл оқиғаның ықтималдығын мәселенің жағдайына қарай табу керек.

Тауардың А дүкенінен жеткізілмеуі А оқиғасының ықтималдығы тауар жеткізілгеніне қарама-қарсы оқиғаға тең, яғни.

*P*( *A*)  1  0,81  0,19 .

Сол сияқты В оқиғасы үшін:

*P*(*В*)  1  0,93  0,07 .

Қажетті ықтималдық мынаған тең:

*P*(*C*)  *P*( *A*)*P*(*B*)  0,19  0,07  0,0133 .

Жауабы: 0,0133.

Тапсырмалар:

1. Дүкенде үш сатушы бар. Олардың әрқайсысының клиентпен айналысу ықтималдығы 0,2. Кездейсоқ уақытта барлық үш сатушының бір уақытта бос емес болу ықтималдығын табыңыз (тұтынушылар бір-бірінен тәуелсіз кіреді делік).
2. Шахматшы Бектас ақ түспен ойнаса, онда ол 0,6 ықтималдықпен шахматшы Акбарды жеңеді. Егер Бектас қара түспен ойнаса, онда 0,4 ықтималдықпен жеңеді. Гроссмейстерлер екі ойын ойнайды, ал екінші ойында фигуралардың түсін өзгертеді. Бектастың екі рет жеңіске жету ықтималдығын табыңыз.
3. Кездейсоқ тәжірибеде тиын үш рет лақтырылады. Оның дәл үш рет Елтаңба жағымен шығу ықтималдығын табыңыз.
4. Урнада 3 ақ, 3 қара шар бар. Бір шарды кері қайтармай, урнадан екі рет шығарады. Бірінші сынақта қара шар тартылған болса (А оқиғасы) екінші сынақта ақ шардың пайда болу ықтималдығын табыңыз (В оқиғасы).
5. «Арифметика» сөзін әріптерге кесіп, оның 5-ін қатарға тізді. «Фирма» сөзін алу ықтималдығы қандай?

#### 11.Ықтималдықтарды көбейту

Оқиғалардың логикалық туындысының ықтималдығын есептеу қажет болғанда ықтималдықтарды көбейту қолданылады.

А ∩ В деп белгіленген екі А және В оқиғаларының логикалық туындысы А және В оқиғаларының бір уақытта пайда болуы деп түсінілетін оқиға.

Тәуелсіз оқиғалар үшін ықтималдықтарды көбейту теоремасы. Екі тәуелсіз А және В оқиғаларының бір мезгілде пайда болу ықтималдығы, A ∩ B осы оқиғалардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең және мына формуламен есептеледі:

*P*( *A*  *B*)  *P*( *A*)  *P*(*B*).

Мысал:

Тиын қатарынан үш рет лақтырылады. Елтаңбаның үш рет де түсу ықтималдығын табыңыз.

Шешім. Елтаңба монетаның бірінші лақтырылуы кезінде

*P*( *A* )  1 ,

1 2

екінші рет лақтырылғанда

*P*( *A* )  1 , үшінші рет лақтырылғанда *P*( *A* )  1

2 2 3 2

болуы ықтималдығы. Елтаңбаның үш рет түсу ықтималдығын табыңыз:

*P*( *A* ∩ *A* ∩ *A* )  *P**A*  *P**A*  *P**A*   1  1  1  1

Тапсырмалар:

1 2 3

1 2 3

2 2 2 6

1. Тоғыз жаңа теннис доптары бар қорап бар. Ойынға үш доп алынады, ойын аяқталғаннан кейін олар кері қойылады. Доптарды таңдағанда олар ойналған және ойналмаған доптарды ажыратпайды. Үш ойыннан кейін қорапта ойналмаған доптардың қалмау ықтималдығы қандай?
2. Кесілген әліпби карталарында алфавиттегі 42 әріп жазылған. Кездейсоқ жеті карта бірінен соң бірі шығарылып, олардың пайда болу ретімен үстелге қойылады. Әріптердің «ТОПЫРАҚ» сөзін жасау ықтималдығын табыңыз.
3. Карталардың толық палубасынан (52 -карта) бірден төрт карта шығарылады. Осы төрт картаның барлығы әртүрлі болу ықтималдығын табыңыз.
4. Жүктер үш көлік түрімен жеткізіледі: өзен, теміржол және автомобиль көлігі. Жүктің өзен көлігімен жеткізілу ықтималдығы 0,82, темір жол көлігімен 0,87, автомобиль көлігімен 0,90. Тауардың үш көлік түрінің кем дегенде біреуімен жеткізілу ықтималдығын табыңыз.
5. Бір урнада 1 ақ және 4 қара шар, ал екіншісінде - 2 ақ және 4 қара, үшіншісінде - 3 ақ және 1 қара шар бар. Әр урнадан доп тартылды. Олардың арасында ақтардың болмауының ықтималдығын табыңыз;

#### 12. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремаларынан қорытынды

1. Жаңа шарикті қаламның нашар жазу (немесе жазбау) ықтималдығы 0,19. Дүкенде сатып алушы осындай бір қаламды таңдайды. Бұл қаламның жақсы жазу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Қаламның жақсы жазу ықтималдығы 1 − 0,19 = 0,81. Жауабы:

0,81.

1. Кездейсоқ уақытта дені сау адамның дене температурасының 36,8 ° C- тан төмен болу ықтималдығы 0,87. Кездейсоқ уақытта сау адамның дене қызуы 36,8°С және одан жоғары болу ықтималдығын табыңыз. Жауап. 1- 0,87=0,13
2. Диаметрі 67 мм мойынтірек дайындау кезінде диаметрдің берілгеннен 0,01 мм-ден көп емес ерекшелену ықтималдығы 0,965-ке тең. Кездейсоқ мойынтіректің диаметрі 66,99 мм-ден кем немесе 67,01 мм-ден жоғары болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Шартқа сәйкес, мойынтіректің диаметрі 0,965 ықтималдығымен 66,99-дан 67,01 мм-ге дейін болады. Демек, жалған оқиғаның қажетті ықтималдығы 1 − 0,965 = 0,035. Жауабы: 0,035.

1. Геометриядан емтиханда оқушы жинақтан бір тапсырма алады. Бұл тапсырманың «Бұрыштар» тақырыбы бойынша болу ықтималдығы 0,1. Бұл

«Параллелограмм» тақырыбы бойынша тапсырма болу ықтималдығы 0,6. Жинақта осы екі тақырыпқа бір мезгілде қатысты мәселелер жоқ. Емтиханда оқушының осы екі тақырыптың біреуі бойынша тапсырма алу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Үйлесімсіз оқиғалардың жалпы ықтималдығы осы оқиғалардың ықтималдығының қосындысына тең: P = 0,6 + 0, 1 = 0,7. Жауабы: 0,7.

1. Студенттің химиядан тест бойынша 8-ден астам есептерді дұрыс шешу ықтималдығы 0,48. 7-ден артық есептерді дұрыс шешу ықтималдығы 0,54. Дәл 8 есепті дұрыс шешу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Бірнеше есептерді шешу ықтималдығы осы есептердің әрқайсысын шешу ықтималдығының қосындысы болып табылады. 8-ден көп: 9-шы, 10-шы ... 7-ден көп: 8-ші, 9-шы, 10-шы ... шешу ықтималдығы 8-ші = 0,54-0,48=0,06. Жауабы: 0,06

1. Телефон пернетақтасында 0-ден 9-ға дейін 10 цифр бар. Кездейсоқ басылған санның 4-тен кем болу ықтималдығы қандай? Жауабы: 4

: 10 = 0,4.

1. Екі спортшы нысанаға бес рет оқ атады. Бір оқпен нысанаға тию ықтималдығы 0,8. Биатлоншының нысанаға алғашқы үш рет тиіп, ал соңғы екеуін өткізіп алу ықтималдығын табыңыз. Нәтиже жүздікке дейін дөңгелектенеді.

Шешуі. Екі спортшы 0,8 ықтималдықпен нысанаға тигендіктен, ол 1 − 0,8 = 0,2 ықтималдықпен жіберіп алады. Әрбір соққымен құлау немесе жіберіп алу оқиғалары бізге тәуелді емес, қамтамасыз ету ықтималдығы бұл оқиғалар үшін емес, олардың ықтималдылығын растаумен тең. Осылайша,

оқиғаның ықтималдығы 0,8  0,8  0,8  0,2  0,2 = 0,02048 тең. Жауабы: 0,02048.

1. Бөлме екі шамы бар шаммен жарықтандырылады. Жыл ішінде шамның істен шығу ықтималдығы 0,3 құрайды. Бір жыл ішінде ең болмағанда бір шамның жанып кетпеу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Екі шамның да жану ықтималдығын табыңыз. Бұл оқиғалар тәуелсіз, олардың пайда болу ықтималдығы осы оқиғалардың пайда болу

ықтималдығына тең:

0,3  0,3 = 0,09

Кем дегенде бір шамның жанбауынан

тұратын оқиға, бұл жалған. Демек, оның ықтималдығы 1 − 0,09 = 0,91. Жауабы: 0,91.

1. Батареяның ақаулы болу ықтималдығы 0,06. Дүкенде сатып алушы екі осындай батареядан тұратын кездейсоқ пакетті таңдайды. Екі батареяның да дұрыс болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Батареяның дұрыс болу ықтималдығы 0,94. Күтпеген оқиғалардың алдын алу ықтималдығы (екі батарея да дұрыс болып шығады ) осы оқиғалардың ықтималдығына тең: 0,94  0,94 = 0,8836 . Жауабы: 0,8836.

1. Аудан орталығынан ауылға күн сайын автобус қатынайды. Дүйсенбі күні автобуста 20-дан аз жолаушы болу ықтималдығы 0,94. 15-тен аз жолаушы болу ықтималдығы 0,56. Жолаушылар саны 15 пен 19 арасында болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. А = «автобуда 15-тен аз жолаушы бар» және B = «автобуста сажировта 15-тен 19-ға дейін жолаушы бар» оқиғаларын қарастырайық. Олардың сомасы A + B = «автобуда 20-дан аз жолаушы бар» оқиғасы болып табылады. А және В оқиғалары үйлесімсіз, олардың қосындысының ықтималдығы осы оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысына тең: P(A

+ B) = P(A) + P(B).

Содан кейін, осы тапсырмаларды пайдалана отырып, біз аламыз: 0,94 = 0,56 + P (V), бұл жерден P (V) = 0,94 - 0,56 = 0,38 Жауап: 0,38.

#### 13.Статистикалық ықтималдық

Тапсырмаларда сипатталған оқиғалардың ықтималдығын табу кезінде біз сынақтарды өткізген жоқпыз. Алайда, жаратылыстану, экономика, медицина, өндіріс салаларындағы кездейсоқ құбылыстарды зерттегенде, көптеген сынақтарды жүргізу қажет. Сондықтан классикалық анықтамамен қатар іс жүзінде ықтималдықтың статистикалық анықтамасын қолданады. Онымен танысу үшін салыстырмалы жиілік ұғымын енгізу қажет.

Қандай да бір тәжірибемен байланысты кездейсоқ A оқиғасы болсын.

Тәжірибе N рет орындалды және A оқиғасы есептейік. Қатынас:

NA жағдайында болды деп

*w*  *NA*

*N*

- қарастырылып отырған тәжірибелер қатарында A оқиғасының орын алуының салыстырмалы жиілігі деп аталады.

Мысал:

75 ату арқылы нысанаға тиюдің статистикалық ықтималдығы 0,6. Қанша рет нысанаға дөп тиеді?

Шешуі:

*N A*  0,6  75  45

Жауабы: 45 рет дәл тиген. Тапсырмалар:

1. Мектеп формасын тігуге 2200 түймеге тапсырыс берілді. 500 түйменің партиясын тексеру кезінде 6 ақауы анықталды. Жетіспеушіліктің алдын алу үшін тапсырыс беру керек қосалқы түймелердің ең аз саны қанша?
2. Ойын сүйегі 60 рет лақтырылады, нәтижесінде 10 алтылық шығады. Алтылықтың салыстырмалы жиілігі қандай?
3. Нысанаға ату кезінде соққылардың салыстырмалы жиілігі

. 40 рет атқан кезде нысанаға дәл тию санын табыңыз.

*w*  0,75

1. 400 өнімнің сапасын тексерген бақылаушы оның 20-сы екінші, қалғаны бірінші сортқа жататынын анықтады. Бірінші сортты өнімдердің салыстырмалы жиілігін, екінші сортты өнімдердің салыстырмалы жиілігін табыңыз.
2. Тұқымның сапасын анықтау үшін 100 тұқым іріктеліп, зертханалық жағдайда себілді. 95 тұқым қалыпты өсінді берді. Тұқымның қалыпты өну жиілігі қандай?

#### 14.Геометриялық ықтималдық

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы мәселелердің тұтас кешенін шешу үшін тиімді болып шығады, бірақ екінші жағынан оның бірқатар

шектеулері де бар. Осындай шектеулердің бірі оның нәтижелерінің шексіз саны бар сынақтарға қолданылмайтындығы. Ең қарапайым мысал:

Нүкте кездейсоқ түрде 0;1 кесіндісіне лақтырылады. Оның 0,4;0,7

интервалына түсу ықтималдығы қандай?

https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/teoriya_veroyatnostey/f/1_5_geometricheskoe_opredelenie_veroyatnosti_clip_image006.jpg 

Сегментте шексіз көп нүктелер болғандықтан, мұнда

*P*( *A*)  *m*

*n*

формуласын қолдану мүмкін емес («n» шексіз үлкен мәніне байланысты), сондықтан ықтималдықтың геометриялық анықтамасы деп аталатын басқа тәсіл келеді:

Сынақтағы кейбір А оқиғасының орын алу ықтималдығы

*P*( *A*)  *g*

*G*

қатынасына тең, мұндағы *G* - берілген сынақтың барлық мүмкін және бірдей ықтимал нәтижелерінің жалпы санын білдіретін геометриялық өлшем, ал *g* - нәтижелер санын білдіретін өлшем. А оқиғасына қолайлы.

Іс жүзінде мұндай геометриялық өлшем көбінесе ұзындық немесе аудан,

азырақ көлем болып табылады.

Оқиғаны қарастырайық: A - 0;1 кесіндісіне лақтырылған нүкте 0,4;0,7

аралығына түсті. Нәтижелердің жалпы саны үлкенірек сегменттің

ұзындығымен өрнектелетіні анық: *L*  1  0  1, ал A оқиғасына қолайлы

нәтижелер кірістірілген сегменттің ұзындығымен өрнектеледі: Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы бойынша:

*l*  0,7  0,4  0,3

*P*( *A*) 

*l*  0,3  0,3

*L* 1

Тапсырмалар:

1. Қайшымен метрлік таспа кездейсоқ кесілген. Кесіндінің ұзындығы кемінде 80 см болу ықтималдығын табыңыз.
2. Дауылдан кейін телефон желісінің 40-70 шақырымы аралығындағы учаскеде сым үзілді. Оның 50 және 55-ші шақырымдар арасында орын алу ықтималдығы қандай?
3. Радиусы 10 см шеңберде катеттері 12 және 7 см болатын тік бұрышты үшбұрыш бар.Шеңберге кездейсоқ нүкте қойылған. Оның берілген үшбұрышқа түспеу ықтималдығын табыңыз.
4. Жүк тиеу үшін сағат 19.00-ден 20.30-ға дейінгі уақыт аралығында екі жүк көлігі келе алады. Бірінші вагонды тиеу 10 минутқа, екіншісіне 15 минутқа созылады. Бір машина екіншісінің тиеуді аяқтауын күту ықтималдығы қандай?
5. Студенттер асханаға 14.00-ден 15.00-ге дейін кездейсоқ келеді, олардың әрқайсысына түскі асқа 20 минуттай уақыт кетеді. Ықтималдығын табыңыз: а) Олжас түскі ас кезінде Жандоспен кездеседі, б) бұл кездесу болмайды.

#### Геометриялық ықтималдық тақырыбы бойынша функционалдық сауаттылыққа бағытталған тапсырмалар

* 1. Қабырғасының ұзындығы 8 см болатын шаршыға дөңгелек іштей сызылған. Дөңгелек ауданының шаршы ауданына қатынасын табыңыз.

Берілгені:

а-шаршының қабырғасы – 8 см. Т/к: 𝑆𝑆дөңгелек-?

𝑆𝑆шаршы

Шешуі:

R=а

2

R=8 = 4

2

𝑠𝑠шеңбер = 4 ∙ 4𝜋𝜋 = 16𝜋𝜋

𝑆𝑆шаршы = 8 ∙ 8 = 64

𝑆𝑆дөңгелек=16𝜋𝜋 = 𝜋𝜋

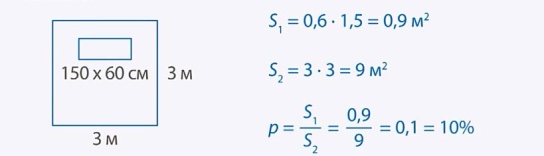
𝑆𝑆шаршы 64 4

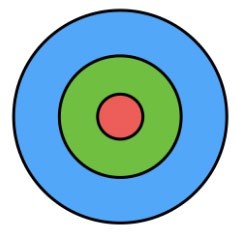
Жауабы: 𝜋𝜋

4

* 1. 3х3 өлшемді алаңда қабырғаларының ұзындықтары 150 см және

60 см болатын тіктөртбұрышты жәшік орналасқан. Арман алаңның сыртында тұрып жәшікке доп лақтыру туралы ойлады. Доптың дәл жәшікке түсу ықтималдығы қандай?



* 1. 5\*6 см 2 тіктөртбұрышқа радиусы 2,5 см шеңбер сызылған.Тіктөртбұрышқа кездейсоқ орналастырылған нүктенің шеңбердің ішінде болу ықтималдығы неге тең (2-сурет)?

Берілгені:

а-тіктөртбұрыштың ұзындығы – 5 см. b-тіктөртбұрыштың ұзындығы – 6 см. R=2.5 см

Т/к: 𝑝𝑝 = 𝑆𝑆дөңгелек -?

𝑆𝑆төртбұрыш

Шешуі:

𝑠𝑠шеңбер = 2,5 ∙ 2,5𝜋 = 6,25𝜋

𝑆төртбұрыш = 5 ∙ 6 = 30

𝑆𝑆дөңгелек =6,25𝜋 = 5𝜋

**Сурет 2 Үшке бөлінген шеңбер**

𝑆𝑆төртбұрыш 30 24

Жауабы: 5𝜋

24

* 1. Берілген кескінде радиустары 2, 4 және 6 болатын концентрлі

шеңберлерден тұратын нысана бейнеленген. Кездейсоқ атылған садақ жебесінің осы нысанаға түсетіні белгілі болса, онда оның қызыл аймаққа түсу ықтималдығын табыңыз;

Шешуі:

Үлкен шеңбердің ауданы: 𝑆1 = 36𝜋

Қызыл түсті шеңбердің ауданы: 𝑆2 = 4𝜋

*Р(А)=* 4𝜋 = 1

36𝜋 9

Жауабы: 1

9

* 1. Берілген кескінде радиустары 2, 4 және 6 болатын концентрлі шеңберлерден тұратын нысана бейнеленген. Кездейсоқ атылған садақ жебесінің осы нысанаға түсетіні белгілі болса, онда оның жасыл аймаққа түсу ықтималдығын табыңыз;

Шешуі:

Үлкен шеңбердің ауданы: 𝑆1 = 36𝜋 Қызыл түсті шеңбердің ауданы: 𝑆2 = 4𝜋 Орта шеңбердің ауданы: 𝑆3 = 16 𝜋 Жасыл түсті шеңбердің ауданы:

𝑆3 − 𝑆2 = 16 𝜋 − 4𝜋 = 12𝜋

*Р(А)=*12𝜋 = 1

36𝜋 3

Жауабы: 1

3

* 1. Берілген кескінде радиустары 2, 4 және 6 болатын концентрлі шеңберлерден тұратын нысана бейнеленген. Кездейсоқ атылған садақ жебесінің осы нысанаға түсетіні белгілі болса, онда оның көк аймаққа түсу ықтималдығын табыңыз.

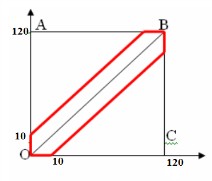
Шешуі:

Үлкен шеңбердің ауданы: 𝑆1 = 36𝜋 Орта шеңбердің ауданы: 𝑆2 = 16 𝜋 Көк түсті шеңбердің ауданы:

𝑆1 − 𝑆2 = 36𝜋 − 16𝜋 = 20𝜋

*Р(А)=*20𝜋 = 5

36𝜋 9

Жауабы: 5

9

* 1. Екі дос кафеге сағат 10:00 мен 12:00 аралығында ездесу туралы ақыдасты. Олар бір-бірін тура 10 минут күтуге келісті, яғни сол уақытта келмесе, онда күтпей кетіп қалады. Олардың осы кафеде кездесу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі:

Келу уақытын *х* және *у, 0≤х;у≤120(минут)* деп белгілейміз. Тікбұрышты координаталар жүйесінде бұл

**Сурет 3 Кездесу аралығы**

шарт OABC шаршысының ішінде жатқан нүктелермен қанағаттандырылады. Достар олардың келген сәттерінің арасында 10 минуттан аспайтын болса, кездеседі, яғни

Сонда кездесу ықтималдығы G аймағы мен шаршы аудандарының қатынасына тең, яғни

𝑃(𝐴) = 𝑆𝐺

𝑆𝑂𝑂𝐴𝐵𝑆

𝑆𝑂𝑂𝐴𝐵𝑆 = 120 ∙ 120 = 14400

𝑆𝐺 = 14400 − (120 − 10)2 = 14400 − 12100 = 2300

𝑃(𝐴) = 2300

14400

= 23 *=0.16*

144

Жауабы: 0,16

1. Ұзындығы 30 см кесіндінің ішіне ұзындығы 15 см кіші кесінді орналастырылған. Үлкен кесіндіге кездейсоқ қойылған нүкте кіші кесіндіге түсетінің ықтималдығын тап. Нүктенің кесіндіге түсетінінің ықтималдығы кесіндіні ңұзындығына пропорционал және оның орналасуына тәуелді емес.

Шешуі:

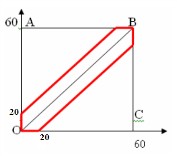
15 1

𝑃(𝐴) = = 30 2

Жауабы: 0,5

1. Әсет пен Айдана белгілі жерде сағат 15 мен 16 аралығында кездесугеу әделеседі. Уәде бойынша олардың әрқайсысы белгіленген жерге

келгеннен кейін екіншісін тура 20 минут күтіп, келмеген жағдайда кетіп қалады. Бұл екеуінің кездесу ықтималдылығы қандай?



**Сурет 4 Кездесу аралығы**

Шешуі:

Келу уақытын *х* және *у, 0≤х;у≤60(минут)* деп

белгілейміз. Тікбұрышты координаталар жүйесінде бұл шарт OABC шаршысының ішінде жатқан нүктелермен қанағаттандырылады. Достар олардың келген сәттерінің арасында 10 минуттан аспайтын болса, кездеседі, яғни

Сонда кездесу ықтималдығы G аймағы мен шаршы аудандарының қатынасына тең, яғни

𝑃(𝐴) = 𝑆𝐺

𝑆𝑂𝑂𝐴𝐵𝑆

𝑆𝑂𝑂𝐴𝐵𝑆 = 60 ∙ 60 = 3600

𝑆𝐺 = 3600 − (60 − 20)2 = 3600 − 1600 = 2000

𝑃(𝐴) =

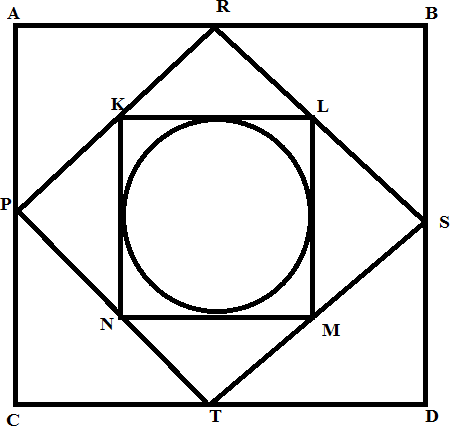
2000 5

=

3600 9

5

Жауабы:

9

1. Қабырғасы 30 болатын квадратттың қабырғаларын орталарын қосу арқылы 2-ші квадрат алынды. 2-ші квадрат қабырғаларын орталарын қосу арқылы 3-ші квадрат алынды. Бастапқы квадрат ішінен кездейсоқ алынған нүкте 3-ші квадратқа іштей сызылған дөңгелекке тиісті болуы ықтималдылығы қандай? (5-сурет)

Шешуі:

𝑎𝐴𝐵𝐶𝐷 = 30

**Сурет 5 Ішкі қабырғалары қосылған квадрат**

𝑎𝑃𝑅𝑆𝑇 =

𝑎𝐾𝐿𝑀𝑁 =

30

2 √2 = 15√2

15√2

2 √2 = 15

𝑟 = 𝑎𝐾𝐿𝑀𝑁 = 15 = 7,5

2 2

*Табу керек:*

𝑃(𝐴) = 𝑆Шеңбер

𝑆𝐴𝐵𝐶𝐷

𝑆Шеңбер = 7,5 ∙ 7,5𝜋 = 56,25𝜋

𝑆𝐴𝐵𝐶𝐷 = 30 ∙ 30 = 900

𝑃(𝐴) = 𝑆Шеңбер = 56,25𝜋 = 9

= 0,0625

*Жауабы:* 0,0625

𝑆𝐴𝐵𝐶𝐷

900

144

1. Ұзындығы 40 см кесіндінің ішіне ұзындығы 15 см кіші кесінді орналастырылған. Үлкен кесіндіге кездейсоқ қойылған нүкте кіші кесіндіге түсетінің ықтималдығын тап. Нүктенің кесіндіге түсетінінің ықтималдығы кесіндіні ңұзындығына пропорционал және оның орналасуына тәуелді емес. Шешуі:

𝑃(𝐴) =

15 3

=

40 8

= 0,375

1. Ұзындығы 50 см кесіндінің ішіне ұзындығы 15 см кіші кесінді орналастырылған. Үлкен кесіндіге кездейсоқ қойылған нүкте кіші кесіндіге түсетінің ықтималдығын тап. Нүктенің кесіндіге түсетінінің ықтималдығы кесіндіні ңұзындығына пропорционал және оның орналасуына тәуелді емес. Шешуі:

*Дескрипторлары*:

15

𝑃(𝐴) =

50

3

= = 0,3

10

* Қажет болған жағдайда есептің шартына сәйкес сызба сызады;
* Есептер шығаруда геометриялық ықтималдықты қолданады;
* Оқиғалардың ықтималдығын есептейді;

#### 16. Оқиғалардың ықтималдығы тақырыбы бойынша қорытынды

***сабақ.***

1. Зауытта жиналған 1000 теледидардың 5 данасы ақаулы. Сарапшы кездейсоқ таңдалған 1000 теледидардың біреуін тексереді. Тексерілген теледидардың ақаулы болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Теледидарды таңдау кезінде 1000 нәтиже болуы мүмкін, ал

«таңдалған теледидар ақаулы» А оқиғасының 5 қолайлы нәтижесі бар. Р(А) = 5÷1000 = 0,005 анықтау ықтималдығы. Жауабы: 0,005.

1. Урнада 9 қызыл, 6 сары, 5 жасыл шар бар. Урнадан кездейсоқ бір шар алынады. Бұл шардың сары болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Нәтижелердің жалпы саны шарлар санына тең: 9 + 6 + 5 = 20. Бұл оқиға үшін қолайлы нәтижелер саны 6. Қажетті ықтималдық 6÷20 = 0,3. Жауабы: 0,3.

* 1. Мақсат, Гүлзат, Жанар, Ғалымжан, Дархан, Дана қатар лақтырды - ойынды кім бастау керек. Бала ойынды түзетуге тура келетін ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Оқиғаның ықтималдығы қолайлы жағдайлардың барлық жағдайлардың санына қатынасына тең. Мақсат, Ғалымжан немесе Дархан ойынды бастағанда қолайлы оқиғалар саны 3, ал барлық оқиға 6. Сондықтан қажетті қатынас 3:6 = 0,5. Жауабы: 0,5.

* 1. Әлем чемпионатына 16 команда қатысуда. Жеребе тарту арқылы олар төрт командадан төрт топқа бөлінуі керек. Қорапта топ нөмірлері жазылған карточкалар бар: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Команда капитаны бір картаны тартады. Ресей құрамасының екінші топта болу ықтималдығы қандай?

Шешуі: А оқиғасы арқылы «Екінші топтағы Ресей құрамасын» белгілейік. Сонда қолайлы оқиғалардың саны m = 4 (2 саны бар төрт карта), ал ықтималдығы бірдей оқиғалардың жалпы саны P = 4 ықтималдығының анықтамасы бойынша n = 16 (16 карта): 16 = 0,25. Жауабы: 0,25

* 1. Шаңғы жарысына Ресейден 11, Норвегиядан 6, Швециядан 3 спортшы қатысады. Спорттық шараның басталу реті анықталады. Ресейден емес спортшыларға не берілетіндігінің ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Жалпы спортшылар 11 + 6 + 3 = 20 адам. Сондықтан Ресейден 9:20 = 0,45 тең спорт түрін бастау өте маңызды. Жауабы: 0,45.

* 1. Әрбір 1000 электр шамына 5 ақау келеді. Жұмыс істейтін шамды сатып алу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Әрбір 1000 шамға 5 ақау бар, олардың биіктігі 1005. 1005 шам дұрыс шамдар саны бірдей болады, яғни 1000:1005=0,995 Жауабы: 0,995.

* 1. Туристер тобында 8 адам бар. Жеребе арқылы олар азық-түлік сатып алу үшін ауылға баруы керек алты адамды таңдайды. Топқа кіретін турист Досханның дүкенге бару ықтималдығы қандай? 6 : 8=0,75.
  2. Футболдан 16 команда чемпионатқа қатысады, олар да 4 топқа бөлінеді: A, B, C және D. Ресей құрамасының А тобына түспеу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Әр команда 0,25 ықтималдығы бар топқа түседі. Осылайша, команданың топқа түспеу ықтималдығы 1-0,25 = 0,75. Жауабы: 0,75

* 1. Шахмат турниріне 26 қатысушы келді, оның ішінде Алмат пен Марат бар. Бірінші турдың жеребесі үшін қатысушылар кездейсоқ түрде 13 адамнан екі топқа бөлінді. Алмат пен Мараттың әртүрлі топқа түсу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Барлығы 26 орын бар. Алмат кез келген топта кездейсоқ орын алсын. 25 орын қалады, оның 13-і басқа топта. Маратқа орын таңдауды нәтиже деп санаймыз. Қолайлы нәтижелер 13. Р=13/25 = 0,52. Жауабы: 0,52

* 1. Сыныпта 16 оқушы бар, олардың арасында екі дос – Батыр мен Бақыт бар. Оқушылар кездейсоқ түрде 4 бірдей топқа бөлінеді. Батыр мен Бақыттың бір топта болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Бірінші болып Бақыт орын алса, Батырда 15 орын қалды. Оның

1. і Бақытпен бір топта. Қажетті ықтималдық 3/15. Жауабы: 0,2
   1. Сыныпта 21 оқушы бар, олардың арасында екі дос – Дарын мен Дархан бар. Сынып кездейсоқ 3 бірдей топқа бөлінеді. Дарын мен Дарханның бір топта болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Достардың бірі топта болсын. Онымен бірге қалған 20 студенттің 6 адамы топта болады. Осы 6 адамның арасында дос болу ықтималдығы 6 : 20 = 0,3. Жауабы: 0,3

* 1. Үстел теннисі бойынша чемпионаттың бірінші кезеңі басталғанға дейін қатысушылар жеребе тарту арқылы кездейсоқ түрде ойын жұптарына бөлінеді. Чемпионатқа барлығы 16 спортшы қатысуда, оның ішінде Қазақстаннан 7 қатысушы, оның ішінде Асылжан Манапов бар. Бірінші айналымда Асылжан Манаповтың Қазақстанның кез келген спортшысымен ойнау ықтималдығын табыңыз? 6:15=0,4. Жауабы: 0,4.
  2. Дойбы чемпионатының бірінші туры басталғанға дейін қатысушылар жеребе тарту арқылы кездейсоқ түрде ойын жұптарына бөлінеді. Чемпионатқа барлығы 26 дойбышы қатысады, оның ішінде Көкшетаудан 3 қатысушы, оның ішінде Ұлан Батыров бар. Бірінші айналымда Ұлан Батыровтың Көкшетаудан келген дойбышымен ойнау ықтималдығын табыңыз? 2: 25=0,08. Жауабы: 0,08.
  3. Сыныпта 26 оқушы бар, олардың арасында екі дос – Самат пен Қанат бар. Оқушылар кездейсоқ түрде 2 бірдей топқа бөлінеді. Самат пен Қанаттың бір топта болу ықтималдығын табыңыз. Жауап 12: 25 = 0,48.
  4. Сыныпта 21 оқушы бар, оның ішінде 2 дос – Жанат пен Ахан. Дене шынықтыру сабағында сынып кездейсоқ 3 бірдей топқа бөлінеді. Жанат пен Аханның бір топта болу ықтималдығын табыңыз. Жауап 6: 20 = 0,3.
  5. Сыныпта 21 оқушы бар, олардың арасында екі дос - Анар мен Шұға бар. Сынып кездейсоқ түрде әрқайсысы 3 адамнан жеті топқа бөлінеді. Анар мен Шұғаның бір топта болу ықтималдығын табыңыз. Жауабы: 2:20 = 0,1.
  6. Он екі сағаттық циферблатты механикалық сағат бір сәтте істен шығып, жұмысын тоқтатты. Сағат тілі 7-ге жеткенде тоқтап, бірақ 1-ге жетпей қалу ықтималдығын табыңыз. Жауап. 6 : 12= 0,5 (12 мен 7

арасындағы 6 бөлім, барлығы 12 бөлім)

* 1. Он екі сағаттық циферблатты механикалық сағат бір сәтте істен шығып, жұмысын тоқтатты. Сағат тілі 9-да емес, сағат 6-да қатып қалу ықтималдығын табыңыз. 3:12 = 0,25

#### КОМБИНАТОРИКА

***17.Комбинаторика ережелері***

А = { a1 ,..., an } және B = { b1,..., bm } нысандарының екі жиыны болсын,

содан кейін алдымен А нысанынан бір нысанды, содан кейін В объектісінен

бір нысанды таңдау тәсілдерінің саны

n  m

болып табылады.

Көбейту ережесін толығырақ қарастырайық, атап айтқанда, A = { a1,..., an } және B={ b1,..., bm } жиындары үшін біз барлық келесі таңдау әдістерін тізімдейміз:

a1b1 , a1b2 , ... a1bm

a 2b1 , a 2b2 , ... a 2bm

...

an b1 , an b2 , ... an bm

Тікелей есептеу арқылы бұл жиында жеткіземіз.

n  m

элемент бар екеніне көз

1-мысал. Біз көліктердің санын санай аламыз. Облыстың нөмірін түзетсеңіз, қанша нөмір жасауға болады?

( a1 , b2 , b3 , b4 , a5 , a6 )

түріндегі сандарды қарастырамыз, мұндағы ai - 12 бөліктен тұратын әріп,

b j - {0, 1, ..., 9 жиынындағы сан. }, i = 1 , 5 , 6, j = 2, 3, 4. Сонда бірінші

компонент

a1 негізгілік

А1 = {A, B, C, ..., X} жиынына сәйкес | А1 | = 12, *b*2

компоненті А2

= {0, 1, 2, ..., 9} жиынына, *b*3

компоненті

А3 = {0, 1, 2, ..., 9}

жиынына, *b*4

компоненті сәйкес келеді. А 4

= { 0, 1, 2, ..., 9} жиынына *a*5

компоненті А5

= А1

жиынына,

*a*6 компоненті А6

= А1

жиынына сәйкес

келеді. Көбейту ережесін қолданып, көлік нөмірлерінің саны

12 10 10 10 12 12 екенін аламыз.

Мұндай есептеулер үшін бірнеше ұғымдар мен ережелер қажет.

Натурал n санының факториалы n-ге дейінгі барлық натурал сандардың көбейтіндісі болып табылады. Көбейткіштердің реті маңызды емес. Мұндай көбейтінді n! арқылы белгіленеді.

Қосынды ережесі − Егер А нысаны жолдармен және В нысаны тәсілдермен таңдалуы мүмкін болса, "А немесе В" нысаны n + m тәсілмен таңдалуы мүмкін.

Көбейту ережесі – егер А нысанын n тәсілмен таңдауға болатын болса және әрбір осындай таңдаудан кейін В нысанын m тәсілмен таңдауға болады,

онда «А және В» жұбы үшін n  m таңдау болады.

Біреуі немесе екіншісі маңызды болған кезде, біреуі және екіншісі көбейтілген кезде таңдаулар қосылады. Екі ереже де таңдауға болатын қанша опция бар екенін немесе, мысалы, нысандарды басқаша орналастырудың қанша жолы бар екенін табуға мүмкіндік береді.

#### 18-19.Орналастыру

N объектілерді/элементтерді алмастыру – ретті ескере отырып, оларды ретімен орналастыру тәсілі. Мысалы, abc, bca және cab үш әріптің әртүрлі ауыстырулары.

N объектінің ауыстырылуы n ұзындығының ауыстырылуы деп те аталады. Барлық осындай ауыстырулардың саны Pₙ деп белгіленеді.

Мысал. Интернеттегі киім дүкенінің бетінде үш футболка бар. Беттегі олардың орнын өзгертсеңіз, сіз жаңа ауыстыру аласыз. Бетке футболкаларды неше тәсілмен орналастыруға болады?

Шешуі. Үш футболканы бетте орналастыруға болады: P3 = 3! = 1 2  3

Мысал. Күнделікті тапсырманы орындау үшін ойыншы сиқыршыға әртүрлі түсті төрт кристалдан тұратын себетті әкелуі керек. Алдымен себетті табу керек, ал кристалдарды оған кез келген ретпен салуға болады. Тапсырманы орындау тәсілдерінің санын қалай табуға болады?

Шешуі. Квестті орындау үшін сізге 5 элемент қажет. Себет әрқашан бірінші болып табылады, сондықтан оның орны бекітілген. Қалған 4 элементті жинау реті 4 элементтің ауыстыру санына тең. Барлығы 4! =24 тапсырманы орындаудың жолы бар.

Тапсырмалар:

1. Билет кассасына неше тәсілмен кезекке тұруға болады: 1) 3 адам; 2) 5 адам?
2. Төрт адам орындыққа неше тәсілмен отыра алады?
3. Маратта түскі ас – бірінші, екінші, үшінші тағамдар мен торт. Ол міндетті түрде торттан бастайды, ал қалғандарының бәрін кездейсоқ ретпен жейді. Мүмкін түскі ас нұсқаларының санын табыңыз.
4. K, L, M, H әріптері төртбұрыштың төбелерін неше тәсілмен белгілей алады?
5. Төрт дос кино билеттерін сатып алды: бірінші қатардағы 1-ші және 2- ші орындар және екінші қатардағы 1-ші және 2-ші орындар. Достар кинотеатрдағы осы 4 орынды неше жолмен алады?
6. Курьер пакеттерді 7 түрлі мекемеге жеткізуі керек. Ол қанша жолды таңдай алады?
7. Самал досының телефонының соңы 5, 7, 8 сандарымен аяқталатынын есіне алды, бірақ ол бұл сандардан кейінгі ретті ұмытып кетті. Оның досымен байланысу үшін ең көп жасайтын опцияларын көрсетіңіз.
8. Алты таңбалы сандар (қайталанбайтын цифрларсыз) сандардан неше құруға болады: а) 1,2, 5, 6, 7, 8; ә) 0, 2, 5, 6, 7, 8?
9. 3, 5, 7, 9 сандарынан тұратын төрт таңбалы сандардың нешеуі (цифрларды қайталаусыз): а) 3 санынан басталатындай;

ә) 15-тің еселіктері?

1. 1, 3, 5, 7 сандарынан (қайталамай) құрастыруға болатын барлық төрт таңбалы сандардың цифрларының қосындысын табыңыз.
2. Жеті ұл, оның ішінде Болат пен Ыбырай қатарда тұрады. Ықтимал комбинациялар санын табыңыз, егер:

а) Болат қатардың соңында болуы керек;

б) Болат қатардың басында, ал Ыбырай қатардың соңында болуы

керек;

в) Болат пен Ыбырай қатар тұруы керек.

1. Матч басталар алдында он бір ойыншы сапқа тұрады. Біріншісі - капитан, екіншісі - қақпашы, ал қалғандары кездейсоқ. Құрылыстың неше жолы бар?
2. Текшенің төбелерін A, B, C, D, E, F, G, K деп неше тәсілмен белгілеуге болады?
3. Дүйсенбі күнгі сабақ кестесінде алты сабақ бар: алгебра, геометрия, биология, тарих, дене шынықтыру, химия. Екі математика сабағы қатар өтетіндей бір күндік сабақ кестесін неше тәсілмен реттеуге болады?
4. «Конус» сөзінің әріптерінің неше алмастыруы бар, онда K, O, H әріптері қатар орналасқан?
5. Театрда бір қатардан 1-ден 10-ға дейін 5 ұл мен 5 қыз неше тәсілмен орын ала алады? Ұлдар тақ жерде, ал қыздар жұп жерде отырса, олар мұны неше жолмен жасай алады?
6. Әр қыз екі ұлдың арасында отыруы үшін бес ұл мен төрт қыз тоғыз орындыққа отырғысы келеді. Олар мұны қанша жолмен жасай алады?
7. 30 және 210 сандарын көбейткіштерге жікте. Санды жай көбейткіштердің көбейтіндісіне неше тәсілмен жазуға болады: 1) 30; 2) 210?
8. 1, 2, 3, 5 сандары арқылы цифрлары қайталанбайтын неше түрлі жұп төрт таңбалы сандарды жазуға болады?
9. Цифрлары бірдей емес неше түрлі тақ бес таңбалы сандарды 1,2, 4, 6, 8 сандары арқылы жазуға болады?
10. Цифрлары қайталанбайтын алты таңбалы неше түрлі сандарды 1 сандары арқылы жазуға болады; 2 3, 4, 5, 6, егер: 1) сан 56-дан басталуы керек; 2) сандағы 5 және 6 сандары қатар тұруы керек?
11. 1,2,3,4 сандарынан бірдей цифрлары жоқ неше түрлі жұп төрт таңбалы сандар жасауға болады?
12. 1) 12 санын жай көбейткіштердің көбейтіндісі ретінде неше тәсілмен жазуға болады; 2) 24; 3) 120?

#### 20.Қайталанбалы орналастыру

Қайталанатын орналастыруда, «қарапайым» орналастырудағы сияқты, объектілердің барлық жиынтығы бірден қатысады, бірақ бір нәрсе бар: бұл жиында бір немесе бірнеше элементтер (нысандар) қайталанады. Келесі стандартты орындаңыз:

Мысал:

Қ, А, З, А, Қ, С, Т, А, Н әріптері бар карталарды қайта орналастыру арқылы қанша түрлі сөздерді (міндетті түрде мағыналы емес) алуға болады?

Шешуі: әріптер арасында бірдей әріптер болғандықтан, формула қолайлы емес, өйткені ол «бос» ауыстыруларды ескереді (мысалы, «Қ» әрпі бар екі карта, ал карталардың пішіні және өлшемі әріптер маңызды емес). Сондықтан, қайталанатын ауыстырулар осы жерде орын алады және қарапайым есептеулерді орындау қалады - бізде барлығы 9 карта бар, оның ішінде әріптер:

А – 3 рет қайталанады; Қ – 2 рет қайталанады; 3 – 1 рет қайталанады; С - 1 рет қайталанады; Т – 1 рет қайталанады; Н – 1 рет қайталанады;

Қайталанатын орналастыру санының формуласы бойынша:

*P*9 

*n*! 

*n* !*n* !*n* !  *n* !

9!

3!2!1!1!1!1!

 30240

әртүрлі сөздерді (әріп тіркестерін)

1 2 3 4

алуға болады.

Жауабы: 30240 Тапсырмалар:

1. 0,1,3,5 сандары бар 4 картадан неше 4 таңбалы сан жасауға болады?
2. Майраның төрт вазасы бар. Егер вазалар түрлі-түсті: ақ, көк, қызғылт және қызыл болса, Майра оларды бөлменің бұрыштарында қанша жолмен орналастыра алады? Барлық вазалар бірдей болса, неше жол қалады?
3. 7 кітапты сөреге неше тәсілмен қоюға болады? Кітаптардың арасында бір үш томдық кітап болса, оның томдары қатар орналастырылуы керек (кез келген ретпен), орналастырудың неше тәсілі қалады?
4. «МАТЕМАТИКА» сөзінің әріптерін қайта орналастыру арқылы неше түрлі сөз жасауға болады? Үш «А» әрпінің қатар тұрмауын талап етсең, неше сөз қалады?
5. Іссапардағы сегіз адамнан тұратын топты үш бөлмеге орналастыру қажет, оның екеуі үш, біреуі екі орынды. Қанша тұру нұсқалары бар?

#### 21.Алмастыру

Алмастыру тәртібі маңызды болған кезде, орналастыру туралы айтылады.

n бойынша k бөлінуі - бұл n түбегейліліктің кейбір жиынынан алынған k әртүрлі элементтердің реттелген жиыны, мұнда k ≤ n. Яғни, n ішінен таңдалған k элементтің кейбір ауыстыруы.

n-ден k-ге дейінгі орналастырулар саны келесідей белгіленеді және есептеледі:

*Ak*  *n*(*n* 1)*n*  2....*n*  *k*  1   *n*! 

*n*

*n*  *k* !

Орналастырудан айырмашылығы, орналастырудың екі параметрі бар: қанша элемент таңдалған (n) және қанша нақты таңдалған (k).

Элементтердің таңдалу реті келесі жағдайларда маңызды:

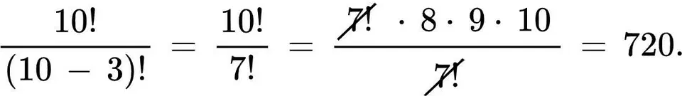
* + Әртүрлі мақсаттар, әртүрлі күндер, әртүрлі рөлдер үшін бірнеше элементтерді таңдаңыз.
  + Элементтер бір-бірінен ажыратылатын болса, орналасу мәселелерінде. Мысалы, топтан бірнеше адамды таңдап, оларды кинотеатрдағы орындықтарға қою қажет болғанда. Адамдар әртүрлі, сондықтан кімнің қайда отырғаны маңызды.

Мысал. Пайдаланушының жанында 9 мейрамхана бар. Олардың ішінде негізгі экранда көрсетілетін 4-ін таңдау керек. Мейрамханаларды таңдаудың қанша жолы бар?

Шешуі. Таңдау тәртібі маңызды, сондықтан өнім ережесі төрт мейрамхананы таңдауға көмектеседі: 9 ∙ 8 ∙ 7 ∙ 6 = 3024 жол бар. Бұл 9-дан 4- ке дейінгі орналастырулардың дәл саны.

Мысал. 10 үміткер болса, үш жерден спорттық тұғырды неше жолмен толтыруға болады?

Шешуі. Реттелген үштікті таңдаудың 10 ∙ 9 ∙ 8 = 720 жолы бар.

Орналастыру санының формуласына сәйкес бұл келесідей есептеледі:

Тапсырмалар:

1. Спорттық командада 9 адам бар. Капитан мен оның орынбасарын таңдау керек. Мұны қанша жолмен жасауға болады?
2. Берілген үшбұрыштың төбелерін A, B, C, D, E, F әріптері арқылы неше тәсілмен белгілеуге болады?
3. Сыныптағы 21 оқушыдан әкімді, қазынашыны және ұйымдастырушыны неше жолмен таңдауға болады?
4. 10 футбол командасы алтын, қола және күміс медальдар үшін қанша әдіспен таласуы мүмкін?
5. Бірінші, екінші және үшінші жүлделерді 15 сайыскерге неше жолмен бөлуге болады?
6. Альбом бетінде фотосуреттерге арналған 6 тегін орын бар. Бос жерге 6 фотосуретті неше тәсілмен орналастыруға болады?

#### 22.Қайталанбалы алмастыру

Қайталанбалы алмастыру - реттелген ⟨n,k⟩ қайталаулары бар іріктеу.

Қайталанатын алмастырулардың жалпы саны:

*Ak*  *nk*

*n*

Мысалы:

1. таңбалы құпия сөзді жасау үшін {+,\*,A,!,2} алфавитіндегі таңбалар қолданылады.

Сіз қанша құпия сөз жасай аласыз?

n=5, k=3 шарты бойынша. 5 таңбаны қайталанатын 3 орынға орналастыруды қарастырыңыз:

*A*3  53  125

5

Барлығы 125 құпия сөз бар.

Нәтижені өнім ережесінен тікелей алуға болады. Шынында да, бірінші позицияда таңбалардың 5 нұсқасы, екіншісінде - 5 нұсқа, үшіншіде - 5 нұсқа бар. Барлығы өнім ережесіне сәйкес: 5 • 5 • 5 = 53 = 125 құпия сөз.

Тапсырмалар:

1. Әрбір қорапта барлық 5 шар болуы мүмкін болса, 5 шарды 8 қорапқа неше жолмен шашыратуға болады?
2. Жания қыз 12 қуыршақты үш қорапқа неше тәсілмен орналастыра алады, егер әрбір қорапқа барлық қуыршақтарды сыйдыра алатын болса?
3. Әр қалтада барлық кәмпиттерді сыйдыра алатын болса, Данияр 9 қалтаға 6 кәмпитті неше жолмен сала алады?
4. 8 жолаушыны 3 вагонға неше тәсілмен орналастыруға болады?
5. Бес жолаушы сегіз қабатты ғимараттың лифтіне кірген. Жолаушылар екінші қабаттан бастап әр қабатта неше тәсілмен түсе алады?

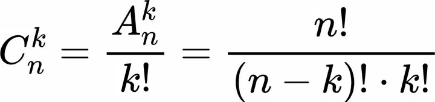
#### 23.Теру және оның қасиеті

Таңдау немесе орналастыру реті маңызды болмаса, есепті теру арқылы шығаруға болады.

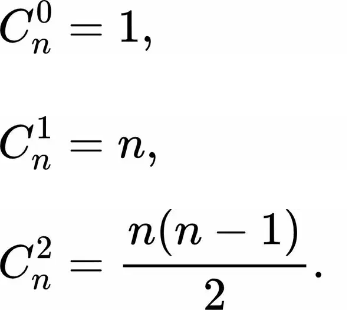
n және k комбинациясы - бұл n түбегейліліктің кейбір жиынынан алынған k әртүрлі элементтердің ретсіз жиыны, мұнда k ≤ n. Яғни, таңдау реті маңызды емес жиынтық.

n-ден k-ге дейінгі комбинациялар саны келесідей белгіленеді және есептеледі:

Комбинациялар саны үшін бірнеше жеке мәндер:



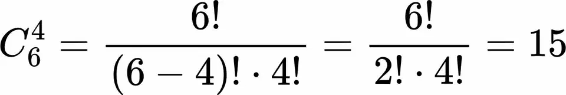
Таңдау немесе орналастыру тәртібі келесі жағдайларда маңызды емес:



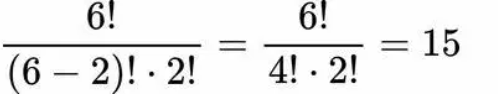
* + Бір уақытта бірнеше элементті таңдау керек болса. Математика оқулықтарындағы ең көп тараған мысал – доптар салынған дорба, одан бірден бірнеше шарлар суырып алынады.
  + Өзара немесе тең процесс үшін жұпты (үштік, топтық) таңдау керек болса. Мысалы, шахмат ойыны үшін екі адам, хоккей ойыны үшін екі команда, ынтымақтастық үшін үш киім бренді, сызық сегменті үшін екі нүкте, хор үшін бес адам.

Мысал. Кәдесый дүкенінде кружкалардың 6 түрі сатылады. 4 түрлі таңдаудың неше жолы бар?

Шешуі. 6 элемент үшін алмастырудың жалпы санын (6 - 4)! және тағы 4! санына бөлу керек, өйткені «таңдалмаған» кружкалардың алмастыруын да, таңдалған кружкалар арасындағы ретті де ескеру қажет емес.

Сондықтан, 6-дан 4 кружканы таңдаудың әдістері:

Ал егер сізге тек 2 түрлі кружканы таңдау керек болса?



Жауап бірдей, себебі бөлгіштегі факторлар жай ғана керісінше.

Бұл үшін де негіз бар: мысалы, 6 кружкадан 4 кружканы таңдау (және оларды сатып алу) 6 кружкадан 2 кружканы таңдаумен (және оларды сатып алмау) бірдей.

Яғни

Жалпы, бұл қасиет келесідей көрінеді:

Ол терулердің симметрия қасиеті деп аталады. Тапсырмалар:

1. Взводта 5 сержант, 50 солдат бар. Бір сержант пен үш сарбаздан құралған киімді қанша жолмен жасауға болады.
2. Сыныпта 36 адам, оның 6-ы оқу озаты. Әр сыныпта үздік оқушылар саны бірдей болу үшін сыныпты әрқайсысы 18 адамнан тұратын екі сыныпқа неше жолмен бөлуге болады?
3. Асханада кезекші болғысы келетін төрт жігіттің үшеуін таңдаудың неше жолы бар?
4. Сыныпта математиканы сәтті оқитын 7 адам бар. Олардың екеуі математикалық олимпиадаға қатысу үшін неше әдіспен таңдалуы мүмкін?
5. Филателия дүкенінде спортқа арналған 8 түрлі маркалар жинағы сатылады. Олардың ішінен 3 жиынтықты неше тәсілмен таңдауға болады?

#### 24.Қайталанбалы терулер

Қайталанатын комбинациялар санын есептеу үшін арнайы формула

бар:

*Ck*  *Ck*

*n n**k* 1

Мысал:

Кондитерлік дүкенде торттың 3 түрі бар. 9 тортты неше тәсілмен сатып алуға болады?

Шешуі: Тапсырма берілген үш түрлі элементтен құралуы мүмкін 9 элементтің мүмкін топтарының санын табу және әр топтағы көрсетілген элементтер қайталануы мүмкін және топтардың өздері бір-бірінен кемінде бір элементпен ерекшеленеді. Бұл тоғыздың үш элементінің қайталануы бар комбинациялар санын табу тапсырмасы. Демек,

*С* 3  *C* 9  *C* 2 

9

11 11

1110  55.

2!

Тапсырмалар:

1. Пошта бөлімшелері ашық хаттардың 10 түрін сатады. Онда 12 ашық хатты қанша жолмен сатып алуға болады? 8 ашықхат? 8 әр түрлі ашық хаттарды қанша жолмен сатып алуға болады?
2. Буратино, мысық Базилио және түлкі Алиса 5 бірдей алтын теңгені неше жолмен бөле алады?
3. Кондитер цехында бес түрлі торт бар. Төрт торттан тұратын жиынтықты неше тәсілмен таңдауға болады?
4. Қабырғаларының ұзындығы 4, 5, 6, 7 мәндерінің бірін қабылдайтын неше үшбұрыш бар?
5. Әр қырының ұзындығы 1-ден 10-ға дейінгі бүтін сан болатын неше түрлі тікбұрышты параллелепипедтер салуға болады?

#### 25.Ньютон Биномы

n-нің кез келген табиғи мәні үшін келесі формула дұрыс болады:

(𝑎 + 𝑏)𝑛 = 𝐶0𝑎𝑛 + 𝐶1𝑎𝑛−1𝑏 + 𝐶2𝑎𝑛−2𝑏2 + ⋯ + 𝐶𝑛𝑏𝑛

𝑛 𝑛 𝑛 𝑛

Бұл формула әдетте Ньютонның биномдық формуласы (биномдық -

екімүше) деп аталады және коэффициенттерін

𝐶0, 𝐶1, ⋯ 𝐶𝑛−𝑚, ⋯ 𝐶𝑛−1, 𝐶𝑛

𝑛 𝑛 𝑛 𝑛 𝑛

биномдық коэффициенттер дейміз.

*Биномдық коэффициенттердің қасиеттері*

1. Көпмүшенің шеттерінен бірдей қашықтықта орналасқан биномдық коэффициенттер өзара тең

𝐶𝑚 = 𝐶𝑛−𝑚

𝑛 𝑛

1. Биномдық коэффициенттердің қосындысы 2𝑛

𝐶0 + 𝐶1 + ⋯ 𝐶𝑛−𝑚 + ⋯ 𝐶𝑛−1 + 𝐶𝑛 = 2𝑛

𝑛 𝑛 𝑛 𝑛 𝑛

1. Ньютон формуласында дәреже көрсеткіштері n-ден 0-ге дейін кемиді, ал b-дің дәрежелері 0-ден n-ге дейін өседі.
2. Кез келген көпмүшенің мүшесіндегі a және b дәрежелерінің қосындысы биномдық дәреженің n-көрсеткішіне тең.
3. Кеңейту (𝑎 + 𝑏)𝑛 құрамында (n+1) терминдер бар

𝑇𝑚+1 = 𝐶𝑚𝑎𝑛−𝑚𝑏𝑚

𝑛

Мысал***:***

15

3

Биномдық кеңеюдің 13-ші мүшесін табыңыз √ √

Шешуі:

� 3 + 2�

a = 3√3; b = √2; n = 15

𝑇 = 𝑇

12 √

3 √ 12 = 13 ∙ 14 ∙ 15 ∙ 3 ∙ 26 = 87360

13 12+1 = 𝐶15 �

3

3� � 2�

1 ∙ 2 ∙ 3

Тапсырмалар:

𝑇13 = 87360

* 1. Биномдық кеңеюдің 7-ші мүшесін табыңыз (2x2 − y3)11
  2. Төртінші кеңейту мүшесінің биномдық коэффициенті 120 болса, биномдық көрсеткішті (a + b)n -i табыңыз.
  3. Үшінші кеңейту мүшесінің биномдық коэффициенті 36 болса, 7-ші биномдық кеңейту мүшесін (a + b)n-i табыңыз.
  4. Биномдық кеңеюдегі n көрсеткішінің мәнін табыңыз (x + y)n егер кеңейтудің бесінші және тоғызыншы мүшелерінің биномдық коэффициенттері тең болса.
  5. Биномдық дәреженің кеңеюінде (x2y + xy2)8 құрамында x11y13

болатын мүшені табыңыз.

#### 26.Паскаль үшбұрышы

Көбейту нәтижесінде алынған барлық коэффициенттердің (мен оларды қою әріппен ерекшелеп көрсеттім) симметриялы болғаны мені ерекше таң қалдырды. Бұл оңай емес екені белгілі болды, көпмүшенің коэффициенттері арасындағы бұл заңдылық авторының атымен «Паскаль үшбұрышы» деп аталады.

Бірақ коэффициенттер арасындағы заңдылықпен қатар, алынған көпмүшенің дәрежелері арасында да тамаша заңдылық бар. Кіріс мономиалдардың дәрежелері былай жасалады екен: ең үлкенінен басталатын бірінші мүшесінің дәрежесі әр мүшеде бірге кемиді, ал екінші мүшесінің дәрежесі, керісінше, нөлден жоғарылайды.

«Паскаль үшбұрышы» келесідей құрастырылған. Үшбұрыштың жоғарғы жағына 1 деп жазамыз. Бірлік (a+b) 0 өрнегіне сәйкес келеді, өйткені нөл дәрежесіне көтерілген кез келген сан бір береді. Үшбұрышты аяқтай отырып, төменде тағы бір бірлік жазамыз. Бұл бірінші дәрежеге көтерілген бірдей биномның кеңею коэффициенттері: (a+b) 1 =a+ b. Үшбұрыштың қабырғалары бірліктерді құрайды және олардың арасында жоғарғы жағында орналасқан екі бірлік қосындысын аламыз, яғни 2. Бұл «қосынды квадрат» үшмүшесінің коэффициенттері: a 2 +2ab+b 2 .

Келесі қатар, алдыңғы сияқты, бірліктермен басталып, бірліктермен аяқталады, олардың арасында жоғарыда орналасқан цифрлардың қосындылары орналасады: 1, 3, 3, 1. Біз «қосынды текшенің» кеңейту коэффициенттерін алдық. Төртінші дәрежелі биномның коэффициенттерінің саны 1, 4, 6, 4, 1 және т.б. болады.

Дәрежесі коэфициенттері

0 1

1 1 1

2 1 2 1

3 1 3 3 1

4 1 4 6 4 1

5 1 5 10 10 5 1

6 1 6 15 20 15 6 1

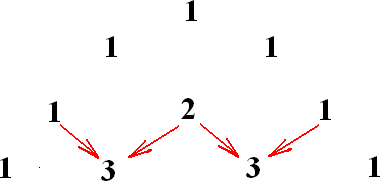
7 1 7 21 35 35 21 7 1

… ……

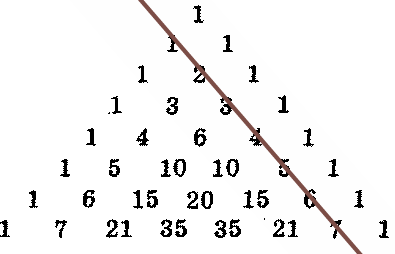
Екі шешімді салыстыра отырып, кеңеюдегі коэффициенттерді табу үшін Паскаль үшбұрышын пайдалансақ, кез келген дәрежеге шығару амалы

ұтымдырақ шешіледі деген қорытындыға келдім. Сондықтан биномды n-ші дәрежеге көтеру керек болса, мен екінші әдісті қолданамын.

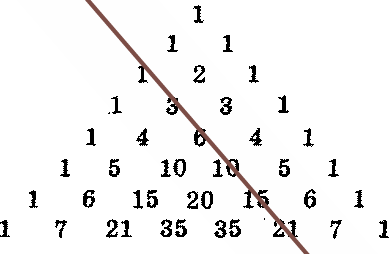
Паскаль үшбұрышының қасиеттері.

1. қасиет. (негізгі)

Әрбір сан оның үстіндегі екі санның қосындысына тең. Үшбұрышты шексіз жалғастыруға болады.

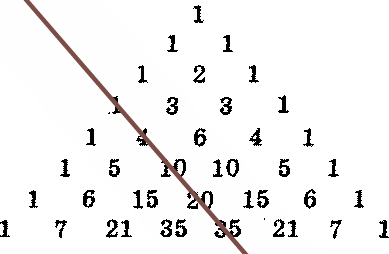
1. қасиет.

Паскаль үшбұрышының бірінші диагоналы реті бойынша натурал сандар болып табылады.

1. қасиет.

Үшбұрышты сандар үшбұрыштың екінші диагоналінің бойымен тізілген (Үшбұрышты сан

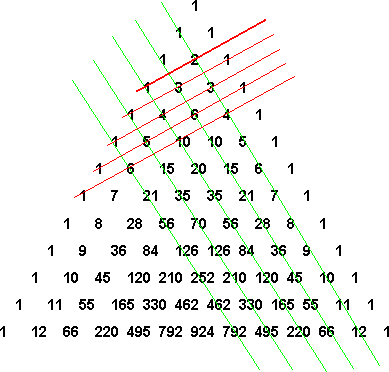
– дұрыс үшбұрыш түрінде орналастыруға болатын шеңберлер саны. Әлбетте, таза арифметикалық тұрғыдан алғанда, n-ші үшбұрышты сан бірінші *n* натурал санның қосындысы).

1. қасиеті.

Паскаль үшбұрышының үшінші диагоналы – «пирамидалық» сандар, дәлірек айтқанда, үшбұрышты пирамидаға (тетраэдр) қанша шар жинауға болатынын көрсететін тетраэдрлік сандар.

Жалпы Паскаль үшбұрышының қасиеттерін терең зерттей берсек бұдан да көп. Мен әзірге осы қасиеттерін қолданып, есептер шығарып көруді жөн көрдім.

Мысал:

Емханадағы алты дәрігердің екеуі біліктілікті арттыру курсына жіберілу керек. Мұны қанша жолмен жасауға болады?

Шешуі:

С2 = 6!

5 ∙ 6

= = 15

6 4! ∙ 2! 1 ∙ 2

Жауабы: 15 тәсіл.

Паскаль үшбұрышы бойынша алтыншы диагональды жоғарыдан тауып, екі санды көлденеңінен санаймыз. 15 санын аламыз.

Тапсырмалар:

1. Ешбір цифр қайталанбаса, 1, 2, 3, 4 сандары арқылы неше түрлі екі таңбалы сандар жасауға болады?Зергерде бес изумруд, сегіз гауһар, төрт топаз бар. Ол екі изумруд, үш гауһар және екі топаз бар білезікті неше тәсілмен жасай алады?
2. Пакетте бір өлшемдегі 7 қатарлы және 5 шаршы дәптер бар. Қаптамадан кездейсоқ 3 дәптер алынады. Үш дәптердің де торда болу ықтималдығы қандай?
3. Жазықтықта 10 түзу бар, олардың арасында параллельдері жоқ, олардың қиылысуының әрбір нүктесі арқылы дәл екі түзу өтеді. Олардың неше қиылысу нүктесі бар?
4. Жазықтықта 14 түзу бар, олардың төртеуі параллель және олардың қиылысуының әрбір нүктесі арқылы дәл екі түзу өтеді. Олардың неше қиылысу нүктесі бар?

#### 27.«Комбинаторика» тақырыбы бойынша қорытынды сабақ

1. Мектептің әдістемелік кеңесіне 9 мұғалім сайланды. Төраға мен оның орынбасарын тағайындау керек. Төраға мен төрағаның орынбасары қанша жолмен сайлануы мүмкін?

Шешуі:

Төраға мен оның орынбасары үшін екі орын бар, оларға 9 адамнан таңдап, 2 адам қою керек. Мұндай топтаулар (таңдамалар) алмастыру деп аталады.

А 2 = 9!

= 9!

= 8·9 = 72.

9

Жауабы**:** *72*

(9−2)! 7!

1. Іскерлік кездесу соңында мамандар визиткалармен алмасты. Жиналысқа 6 адам қатысса, барлығы неше визитка ауыстырылды?

Шешуі:

6 маманның әрқайсысы 5 картадан (өзінен басқаларына) берді. 6•5 = 30 карта.

Жауабы: 30

1. Мектепте мектепішілік пәндік олимпиадаға дайындалу үшін мұғалімдердің шығармашылық тобы құрылады. Үміткерлер тобында 12 тәжірибелі және 5 жас ұстаз бар. Оның ішінде тәжірибелі 4 мұғалім мен 2 жас ұстазды ерекше атап өту керек. Шығармашылық топты қанша жолмен құруға болады?

Шешуі:

Әрбір таңдалған төрттіктегі тәжірибелі мұғалімдердің реті және әрбір таңдалған жұптағы жас мұғалімдердің реті маңызды емес болғандықтан, комбинаторлық көбейту ережесіне сәйкес, қажетті жолдар саны мынаған тең:

С 4 ⋅ С 2 = 12!

⋅ 5!

=9 ⋅ 10 ⋅ 11 ⋅ 12 ⋅ 4 ⋅ 5

= 4 950

12 5

4!(12−4)!

2!(5−2)!

1 ⋅ 2 ⋅ 3 ⋅ 4

1 ⋅ 2

Жауабы: *4 950*

1. Үстел айналасындағы 6 орындыққа 6 қонақты отырғызудың неше нұсқасы бар?

Шешуі:

Түсіну қиын емес, бұл мәселеде біз орналастыру туралы айтып отырмыз: 6 қонақ барлық 6 орындықты алады және тек орындарын ауыстыра алады. 6 орналастыру саны мына формуламен анықталады:

P6 = 6! = 1·2·3·4·5·6 = 720.

Жауабы: *720*

1. COVID-19 таралуының алдын алу бойынша әдістемелік ұсыныстарға сәйкес, сыныптағы оқушылар партаға бір-бірден отырғызылуы керек. Қанша отыру нұсқалары бар?

Шешуі:

Сыныпта 15 парта және 15 оқушы бар.

P15 = 15! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11 · 12· 13 · 14 ·15 =

= 1307674368000

Жауабы: *1307674368000*

1. Асхана мәзірі 2 бірінші, 6 екінші және 4 үшінші тағамдарды таңдауды ұсынады. Бірінші, екінші және үшінші тағамның қанша түрлі нұсқаларын жасауға болады?

Шешуі:

Біз үш тағамды таңдаймыз: бірінші, екіншісі, үшінші. Біз әр тағамды бөлек жейміз (бір-бірімізге тәуелсіз). Сондықтан нұсқаларды көбейту ережесін (I-ереже) қолдануға болады. 2 бірінші курстың біреуін 2 жолмен таңдауға болады; 6 екіншіден - 6 тәсілмен, 4 үшіншіден - 4 жолмен: 2·6·4 = 48.

Жауабы: 48

1. 11-сынып оқушылары жұма күнін жоспарлау үшін 10 пәннен тек 6 пәнді таңдау керек. Сабақтар әртүрлі болуы керек екенін ескере отырып, сабақты жоспарлаудың қанша әдісін қолдануға болады?

Шешуі:

A6 10= 10!

(10−6)!

=10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5=151200

Жауабы: 151200

1. АББ өткізу комиссиясын құру үшін 9 мұғалімнің ішінен 5 мұғалімді таңдау керек.Оны неше әдіспен жасауға болады?

Шешуі:

Мұғалімдерді таңдау олардың орналасу реті ескерілмей жүзеге асырылады. Демек, бұл тоғыздан бес элементтің қосындысы:

С 5 = 9!

= 9! = 6·7 · 8·9

= 1512.

9 5!(9−5)!

5!2! 2

Жауабы: *1512.*

1. Мектептегі «Шалқыма» үйірмесінде 9 оқушы бар. Екі солист таңдау керек. Қанша таңдау бар?

Шешуі:

Екі солист тең (мүмкін олар дуэт болып ән салуды жоспарлап жүрген шығар). Бізге 9 адамнан таңдалған 2 адамнан тұратын топтағы тәртіп маңызды емес. Сонымен, 9-дан 2-ге дейінгі комбинациялар санын анықтаймыз:

С 2 = 9!

= 9! = 8·9

= 36.

9 2!(9−2)!

2!7! 2

Жауабы: *36*

1. Мектепішілік «Сынып портреті» байқауына 10 сынып қатысады. Алтын, қола және күміс медальдарды алудың неше әдісін қолдануға болады?

Шешім

Тұғырда 10 сыныптың 3-і бар және олар үшін олардың әрқайсысының қандай орын алғаны өте маңызды. Сабақтастық ретін ескере отырып топтарды құрастыру – алмастыру. Алмастыру саны мына формуламен анықталады:

А 3 = 10!

= 10! = 8·9·10 = 720.

10 (10−3)! 7!

Жауабы: *720*

1. 7 апта аралығындағы кезеңге сыныптық кезекшілік кестесін жасау қажет. 7–11 сынып оқушылары (7 сынып) кезекшілікте болса, мұндай кестенің қанша нұсқасын жасауға болады?

Шешуі: 7 кезекші сынып, сонымен қатар 7 жұмыс аптасы бар: P7 = 7! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 = 5040.

Жауабы: *5040*

#### СТАТИСТИКА

* 1. ***Жалпы және таңдамалы жиынтық***

Қандай да бір сапалық немесе сандық белгімен сипатталатын объектілердің жиынтығы берілген делік, бұл объектілерді осы елеске қатысты зерттеу керек. Содан кейін үздіксіз зерттеу жүргізіледі, яғни популяциядағы әрбір объектінің берілген атрибутқа қатысты сараптамасы. Мұндай сауалнама тәжірибеде сирек қолданылады, өйткені егер популяцияда көптеген объектілер болса, онда толық зерттеу көп уақытты алады және іс жүзінде мүмкін емес. Бұл жағдайда барлық жиынтықтан кездейсоқ түрде объектілердің шектеулі саны таңдалады және зерттеледі.

Жалпы жиынтық – белгілі бір кездейсоқ шаманың нақты мәндерін алу мақсатында бақылаулар жүргізілетін берілген типтегі барлық ақыл-ой мүмкін объектілердің жиынтығы.

Оның құрамдас объектілерінің жиынтығының шекті немесе шексіз болуына байланысты жиынтық не ақырлы, не шексіз болады.

Жалпы халық ұғымы мен нақты бар популяцияларды ажырата білу керек. Мысалы, зауыт белгілі бір кәсіпорынның өнімдерін бір ай ішінде алды, бұл шын мәнінде бар жиынтық, оны жалпы деп атауға болмайды, өйткені өнім шығаруды ойша ұзақ уақыт бойы жалғастыруға болады.

Таңдама (үлгі жиыны) – жалпы жиынтықтан кездейсоқ таңдалған объектілердің жиынтығы.

Таңдама репрезентативті (репрезентативті) болуы керек, яғни оның объектілері жалпы жиынтықтың қасиеттерін жеткілікті түрде көрсетуі керек.

Таңдалған нысан (келесісін таңдау алдында) жалпы жиынтыққа қайтарылатын үлгі қайталануы мүмкін, ал таңдалған нысан жалпы жиынтыққа қайтарылмайды.

Үлгіні алудың әртүрлі әдістері қолданылады:

1. Қарапайым іріктеу – жалпы халықтан объектілерді қайтару немесе қайтарусыз кездейсоқ алу.
2. Объектілер жалпы жиынтықтан емес, оның «типтік» бөлігінен таңдалған кездегі типтік таңдау.
3. Тізбекті таңдау – объектілер жалпы жиынтықтан бір-бірден емес, тізбектей таңдалады.
4. Механикалық іріктеу – жалпы жиынтық «механикалық түрде» үлгіге кіретін объектілердің санына қарай қанша бөлікке бөлінеді және әр бөліктен бір объект таңдалады.

Популяцияның көлемі (үлгі немесе жалпы) бұл популяциядағы объектілердің саны. Мысалы, егер 100 бөлшектен зерттеу үшін 50 бөлшек таңдалса, онда жиынтық мөлшері N=100, ал іріктеу мөлшері n=50.

#### Вариациялық қатар

Деректерді таңдаудың әртүрлі әдістерімен алған кезде, әдетте, ретсіз орналасқан өлшемдер жиынтығы болып табылатын үлгі қалыптасады. Мұндай үлгіге сүйене отырып, олардың өзгеруінің (вариациясының) қандай да бір заңдылығын анықтау қиын.

Кездейсоқ шаманың бақыланатын мәндері өсу ретімен орналасатын операция рейтинг деп аталады. Бұл операция деректерді өңдеу үшін қолданылады.

Мысал 1. Берілген үлгі:

2, 4,7,3,1,1,3, 2, 7,3,1,3,4,4,7,3,4,7,2,1,7,4,4,1

Үлгіні разрядтайық: 1,1,1,1,1,2, 2, 2 , 3, 3, 3, 3,3,3, 4, 4,4,4,4,4,7,7,7, 7,7

Реттеу операциясы орындалғаннан кейін кездейсоқ шаманың мәндері әрбір жеке кездейсоқ шаманың мәндері бірдей болатын топтарға біріктіріледі. Әрбір осындай мән нұсқа деп аталады және топтың реттік нөміріне сәйкес келетін индекстермен латын әліпбиінің кіші әріптерімен

белгіленеді: *xi*

*, y j*

*,*….

Нұсқаның мәнін өзгерту вариациялау деп аталады.

Өсу ретімен жазылған нұсқалар тізбегі вариациялық қатар деп аталады.

Опцияның сәйкес мәндерінің бақылаулар қатарында қанша рет кездесетінін көрсететін сан нұсқалардың жиілігі немесе салмағы деп аталады

және *ni* арқылы белгіленеді, мұндағы *i* - нұсқалар саны.

Берілген нұсқа жиілігінің жиіліктердің жалпы сомасына қатынасы сәйкес нұсқаның салыстырмалы жиілігі немесе жиілігі (үлесі) деп аталады

*m*

\* *ni*

*р*\*  *ni*

және

*рi* 

*n* немесе *i*

*ni*

*i*1

арқылы белгіленеді, мұндағы *m* – нұсқалар

саны. Жиілік – *xi*

*р*

нұсқаларының пайда болуының статистикалық

ықтималдығы.

\* жиілігін *X* кездейсоқ шамасының

*xi* мәнінің пайда болу

ықтималдығының *рi* аналогы ретінде қарастыру заңды.

*i*

Дискретті статистикалық қатар *x*  – сәйкес *n* жиіліктері немесе *p*\* 

*i i i*

жиіліктері бар *ni* опцияларының ауқымды жиынтығы.

Дискретті статистикалық қатарды 1-кесте түрінде жазу ыңғайлы.

*1-кесте.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *x1* | *…* | *xm* |
| *ni* | *n1* | *…* | *nm* |
| *ni n* | *n*1 *n* | *…* | *nm n* |

Жоғарыда талданған 1-мысалға 2-кестені жасайық:

*2-кесте.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |
| *ni* | 5 | 3 | 6 | 6 | 5 | 5   *ni*  25  *i*1 |
| *ni n* | 5  25 | 3  25 | 6  25 | 6  25 | 5  25 | 5   *р\**  1  *i*  *i*1 |

;

.

Зерттелетін кездейсоқ шама *X* үздіксіз болса немесе оның мәндерінің саны көп болса, онда олар интервалдық статистикалық қатарды құрайды.

Біріншіден, таңдау көлеміне байланысты *m* интервалдарының саны анықталады.

Содан кейін *h* ішінара интервалының ұзындығын анықтаңыз:

*h*  *x*max  *x*min

# m

, мұндағы *h* – қадам; *m* – интервалдар саны.

Дәлірек айтқанда, қадамды Стерджес формуласы арқылы есептеуге болады:

*h*  *x*max  *x*min

## 1 3,322 lg *n*

, Интервалдар саны

*m*  1 3,322 lg *n*.

Егер қадам бөлшек болып шықса, онда интервал ұзындығы ретінде ең жақын бүтін сан немесе ең жақын жай бөлшек алынады (әдетте бірдей ұзындықтағы интервалдар алынады, бірақ әртүрлі ұзындықтағы интервалдар болуы мүмкін).

Бірінші интервалдың басы үшін

*xнач*

 *x*min

* *h* мәнін алу керек, ал соңғы

2

интервалдың соңы

*xкон*

 *h* 

*xmax*

 *xкон*

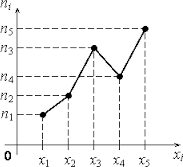
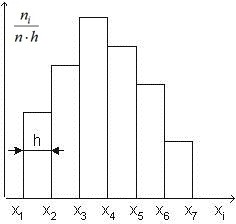
шартын қанағаттандыру керек.

Аралық интервалдар алдыңғы интервалдың соңына қадам қосу арқылы алынады.

Бақылау нәтижелерін зерделеу кезінде мынаны ескеру қажет: әр интервалға кездейсоқ шаманың қанша мәні түсті. Сондай-ақ, аралық интервалдың төменгі шегінен үлкен немесе оған тең және жоғарғы шегінен аз мәндерді қамтиды.

#### 30-31. Статистикалық мәліметтердің графикалық көрінісі.

Статистикалық үлестірім көпбұрыш пен гистограмманың көмегімен графикалық түрде көрсетіледі.

**Сурет 6 Сурет 7**

Жиіліктер көпбұрышы (6-сурет) кесінділері *xi* , *ni*  координаталары бар

дәйекті іргелес нүктелерді қосатын сынық сызық; Жиіліктер көпбұрышы деп

сегменттері *x* , *р*\*  координаталары бар дәйекті көрші нүктелерді қосатын

*i i*

сынық сызықты айтады, мұндағы

\* *ni*

*i n*

*р*



, *i*  1, *m* .

Көпбұрыш – дискретті статистикалық қатардың кескіні.

Жиіліктердің гистограммасы (жиіліктердің, 7-сурет) табандары *Ox*

осінде орналасқан және олардың ұзындықтары *h*жартылай аралықтарының

ұзындықтарына тең, ал биіктіктері тіктөртбұрыштардан тұратын сатылы фигура. қатынасына тең:

*ni* - жиілік гистограммасы үшін;

*h*

*ni n*  *h*

- жиіліктердің гистограммасы

үшін.

Гистограмма интервалдық қатардың графикалық көрінісі болып табылады. Жиілік гистограммасының ауданы *n* және жиілік гистограммасының ауданы 1.

Егер интервалдық қатар дискретті қатар ретінде ұсынылса, онда оған көпбұрыш салуға болады. Бұл жағдайда интервалдардың орнына олардың медианалық мәндері алынады және интервалдық жиіліктер сәйкестікке қойылады. Гистограмма тіктөртбұрыштарының жоғарғы табандарының ортаңғы нүктелерін сегменттермен байланыстырсақ, біз көпбұрыш аламыз.

Мысал. 20 көлемнің *X* кездейсоқ шамасының мәндерінің үлгісі берілген:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12

18, 17, 15, 13, 17, 14, 14, 13, 14, 16

Бізге керегі:

* дискретті вариациялық қатар құру;
* жиіліктер көпбұрышын құру;
* жиіліктердің гистограммасын құру.

1) Дәрежелеу амалын орындайық: 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15,

15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 19.

1. Варианттардың жиіліктерін тауып, дискретті вариациялық қатарды құрайық (4-кесте).

*3-кесте*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант мәндері  *xi* | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |  |
| *ni* | 2 | 3 | 5 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 8   *ni*  20  *i*1 |
| *p\**  *ni i n* | 2  20 | 3  20 | 5  20 | 2  20 | 2  20 | 3  20 | 2  20 | 1  20 | 8   *pi*  1  *i* 1 |

1. Жиіліктер көпбұрышын құрастырайық:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *p\** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *i* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5  20 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3  20 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 2  20 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 1  20 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | **12** |  | **13** |  | **14** |  | **15** |  | **16** |  | **17** |  | **18** |  | **19** |  |  | *x* |  |

**Сурет 8**

1. Интервалдық қатарын құрамыз:

3 кестедегі мәліметтер бойынша: *x*min  12 ; *x*max  19

*h* интервалының ұзындығын табу үшін Стерджесс формуласын қолданамыз:

*h*  *x*max

* *x*min

.

1  3,322 lg 20

Аралықтар саны

*m*  1  3,322 lg 20 .

*h*  *x*max  *x*min 

19  12  7

 7  1,315

1  3,322 lg 20

1  3,322 lg 20 1  3,322 lg 20

5,322

*h* =1,4 *m*  6 мәндерін қабылдаймыз.

# x

 *x*  *h*  12  0,7  11,3

Бірінші интервалдың басын табыңыз:

*нач*

min 2 .

Соңғы аралық шартты қанағаттандыруы керек:

*xкон*  *h*  *xmax*  *xкон* .

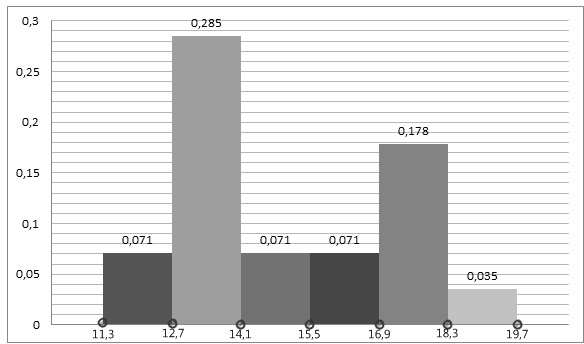
Тексеру:19,7 1,4  19  19,7 ;18,3  19  19,7 .

Интервал қатарын құрамыз.

*Кесте 5.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Интервал | 11,3;12,7 | 12,7;14,1 | 14,1;15,5 | 15,5; 16,9 | 16,9;18,3 | 18,3;19,7 |
| *ni* | 2 | 8 | 2 | 2 | 5 | 1 |
| *ni n*  *h* | 0,071 | 0,285 | 0,071 | 0,071 | 0,178 | 0,035 |

1. Жиілік гистограммасын құрамыз.



**Сурет 9**

#### 32. Эмпирикалық таралу функциясы

Іріктеменің статистикалық таралуы берілген деп есептейік. Осы үлгіден әрбір нұсқаға оның жиілігі тағайындалады.

Эмпирикалық функция (іріктеуді тарату функциясы)

*F* \* *x*

функциясы

болып табылады, ол *x* әрбір мәні үшін оқиғаның жиілігін *X*  *x*, *F* \**x*  *nx* ,

*n*

анықтайды. Мұндағы *n* - таңдама көлемі, *nx* - *x* *x*  *R* кіші болатын бақылаулар саны.

Таңдама көлемі ұлғайған сайын, *X*  *x* оқиғасының жиілігі осы

оқиғаның ықтималдығына жақындайды. *F* \* *x* эмпирикалық функциясы

ықтималдықтар теориясындағы *F* *x* интегралдық функциясын бағалау болып табылады.

*F* \* *x* функциясының *F* *x* функциясы сияқты қасиеттері бар:

1. 0  *F* \**x*  1;

1. *F* \* *x* -кемімейтін функция;

3. *F* \*   0 , *F* \*   1.

Мысал:

Келесі дискретті қатарларды пайдаланып көрсетілген кездейсоқ шама үшін эмпирикалық функцияны және оның графигін құру (6-кесте):

*6-кесте*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| *ni* | 2 | 2 | 3 | 2 | 5 |

0 ,

0,1 ,



*F* \* *x*  0,3 ,

*x*  1;

1  *x*  3;

3  *x*  4;



0,65 ,

0,85 ,



4  *x*  6;

6  *x*  7;

1 ,

*x*  7;

#### Таңдаманың негізгі сандық сипаттамалары

Ықтималдықтар теориясында бір типті кездейсоқ шамаларды (математикалық күту, дисперсия, стандартты ауытқу) сандық сипаттамалар арқылы салыстыруға болады.

Таңдама үшін сандық сипаттамалар да анықталуы мүмкін. Оларды статистикалық сипаттамалар деп атайды, өйткені олар бақылаулар нәтижесінде алынған мәліметтерден (статистикалық мәліметтер) есептеледі.

Негізгі статистикаға мыналар жатады:

1. *R*  *x*max

* *x*min

вариация диапазоны.

1. *M* \*  Мода – ең жоғары жиіліктегі нұсқа.

0

1. *M* \* медианасы – қатардың ортасындағы кездейсоқ шаманың мәні.

*e*

*n* - үлгі өлшемі болсын.

Егер *n*  2*k* , яғни серия мүшелерінің жұп саны болса, онда

*M* \* 

*e*

*xk*  *xk* 1

2

*M*

. Егер

*n*  2*k* 1 , яғни серия мүшелерінің тақ саны болса,

онда

*\**  *x*

*k* 1 .

*n* іріктеу мөлшерінің даностатистикалық таралуы келесідей болсын:

*e*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 |  | *xm* |
| *ni* | *n*1 | *n*2 | *n*3 | *n*4 |  | *nm* |

мұнда *m* - нұсқалар саны.

1. *xв*

іріктеу ортасы – барлық таңдау мәндерінің орташа

арифметикалық мәні:

*x*  1 *m x n*

*в* 

*i*1

*i i* .

*m*

*n*

Орташа үлгіні басқа жолмен жазуға болады: *x*

  *x р*\* ,

мұнда

*р\** - жиілік.

*в i i*

*i*1

*i*

1. *Dв* таңдама дисперсиясы – таңдама мәндерінің орташа *xв*

таңдауынан квадраттық ауытқуларының орташа арифметикалық мәні:

1 *m*  

2

  \*

*Dв*  

*n*

*i* 1

*xi*  *xв*

 *ni*

немесе

*Dв* 

*i*1

*m*

2

*xi*  *xв*

 *pi* .

*в* 

1. Үлгінің орташа квадраты келесі формула бойынша анықталады:

.

*Dв*

 *в*

өлшенеді.

әдісінің ерекшелігі, ол үлгі деректермен бірдей бірліктермен

1. Егер үлгі мөлшері

*n*  30

аз болса, содан кейін түзетілген үлгі

дисперсиясын пайдаланыңыз:

*S* 2 

*n D* .

*n*  1 *в*

1. *S*  шамасы түзетілген стандартты ауытқу деп аталады.

*S* 2

1. Вариация коэффициенті стандартты ауытқудың орташа арифметикалық мәнге қатынасы, пайызбен көрсетілген. Вариация коэффициенті әртүрлі өлшем бірліктері бар екі немесе одан да көп белгілердің дисперсиясын салыстыру үшін қажет. Вариация коэффициенті дисперсияның салыстырмалы өлшемі болып табылады, пайызбен

көрсетілген[9]. Ол формула бойынша есептеледі: *V= σ ·100*% , мұнда V -

*X*

қажетті көрсеткіш, σ - стандартты ауытқу, 𝑋𝑋 - орташа мән.

Мысал арқылы үлгінің сандық сипаттамаларын табуды қарастырыңыз: Үлгі берілген (7-кесте). Үлгінің барлық негізгі сандық сипаттамаларын табыңыз.

*Кесте 7.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 4 | 7 | 10 | 11 |
| *ni* | 10 | 6 | 15 | 4 | 5 |

𝑅 = 11 − 1 = 10

Мо = 7

Ме = 7

1 ∙ 10 + 4 ∙ 6 + 7 ∙ 15 + 10 ∙ 4 + 11 ∙ 5

Хв =

= 5,85

40

1

Dв =

40

∙ ((1 − 5,85)2 ∙ 10 + (4 − 5,85)2 ∙ 6 + (7 − 5,85)2 ∙ 15 + (10 − 5,85)2

∙ 4 + (11 − 5,85)2 ∙ 5) = 477,1 ≈ 11,9

40

𝜎𝜎в = �11,9 ≈ 3,45

𝑆2 = 40 ∙ 11,9 ≈ 12,2

39

𝑆 = 3,49

3,45

𝑉 =

5,85

* 100% = 59%

#### Таңдаманың қосымша сандық сипаттамалары

Іріктеменің негізгі сандық сипаттамаларынан басқа статистикалық қатарларды талдау үшін пайдаланылатын және кездейсоқ шаманың сәйкес сандық сипаттамаларының аналогтары болып табылатын басқалары да бар.

Орташа іріктеу және таңдау дисперсиясы жалпы ұғымның ерекше жағдайы – статистикалық қатардың моменті болып табылады.

*l* ретінің бастапқы үлгі моменті *l* -нің орташа арифметикалық мәні -

барлық үлгі мәндерінің х дәрежесі:

 \*  1

*m*

*xl*  *n*

 \* 

*m*

*xl*  *p*\*

*l*  *i*

*n*

*i*1

*i* немесе

*l*  *i i* .

*i* 1

Анықтамадан бірінші ретті бастапқы іріктеу моменті табылғандығы

 \*  1

*m*

*x*  *n*  *x*

шығады: 1

*n*

 *i i в* .

*i*1

*l* -реттегі орталық үлгі моменті *xв* -тен таңдаманың байқалған

мәндерінің ауытқуының х дәрежесінің *l* орташа арифметикалық мәні болып табылады:

\* 1  

*l*

*m*

*l*

\* *m*   \*

*l*  

*n*

*i* 1

*xi*  *xв*

 *ni*

немесе

*l*  

*i* 1

*xi*  *xв*

 *pi* [15].

Анықтамадан екінші ретті орталық үлгі моменті болып табылады:

\* *m*   2

2

*n*

1

2  

*i* 1

*xi*  *xв*

 *ni*

 *Dв*

 *в* .

Асимметрияның таңдау коэффициенті

*\** саны, формула бойынша

\*

*A*





*s*

анықталады: \* 3

*A*



*s*

3

*в*

Вариациялық қатардың көпбұрышының асимметриясын анықтау үшін асимметрияның таңдамалы коэффициенті қолданылады. Егер көпбұрыш асимметриялық болса, онда оның бір тармағы (жоғарыдан бастап) екіншісіне қарағанда жұмсақ «түсу» болады.

*A*

Егер

*\**  0

болса, онда сол жақта көпбұрыштың неғұрлым жұмсақ

«түсуі» байқалады; егер

*s*

*\**  0 оң жақта болса. Бірінші жағдайда

асимметрия сол жақты, ал екіншісінде оң жақты деп аталады.

*A*

*s*

Куртоздың үлгі коэффициенті немесе салқындық коэффициенті

*E\** саны

деп аталады, формула бойынша анықталады: \*

*k*

*E*

*k*

\*

4  3 .







4

*в*

Үлгінің куртоздық коэффициенті қалыпты таралумен үлгінің таралуының «салқындығын» салыстыру ретінде пайдаланылады.

Қалыпты заң бойынша бөлінген кездейсоқ шама үшін куртоз коэффициенті нөлге тең.

Сондықтан куртоздық үлгі коэффициентінің стандартты мәні ретінде

*\**  0 алынады.

*E*

*k*

#### Таңдаманың сандық сипаттамаларын есептеу

Сандық сипаттамаларды есептеу кезінде есептеудің ауырлығынан туындаған қиындықтарға тап болады. Сипаттамаларды табуды жеңілдету үшін 8 кестені қарастырыңыз:

*8-кесте*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *ni* | *xi*  *ni* | *xi*  *xв* | *x*  *x* 2 *n*  *i в i* | *x*  *x* 3 *n*  *i в i* | *x*  *x* 4 *n*  *i в i* |
| *x*1 | *n*1 |  |  |  |  |  |
| ⁝ | ⁝ |  |  |  |  |  |
| *xm* | *nm* |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *m*   *ni*  *i*1 | *m*   *xini*  *i*1 |  | *m* 2  *xi*  *xв*  *ni*  *i*1 | *m* 3  *xi*  *xв*  *ni*  *i*1 | *m* 4  *xi*  *xв*  *ni*  *i*1 |

Мұнда,

*m*

*xi* - интервал ортасы;

*m*

*ni* **-** жиілігі**;**  *ni*  *n*

*i*1

- таңдама көлемі;

 *xini*

*i*1

қосындының көмегімен

*xв* табамыз:

*Dв*

*m*



*i*1

табамыз;

*s*

2

*i в ni*

 *x*  *x*

қосындысының көмегімен

*Dв* және

*в* 

*m* 3

 

*xi*  *xв ni*

*i* 1

*m* 4

қосындысының көмегімен

*E*

*A\** табамыз;

*xi*  *xв*  *ni*

*i*1

қосындысының көмегімен

*\** табамыз.

#### Статистика тақырыбы бойынша қорытынды сабақ

*k*

1. Төмендегі вариациялық қатар берілген

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1  0 |
| *x* | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |

Табу керек:

1. Жиілік кестесін құру
2. Таңдамалы ортаны, дисперсияны, режимді, медиананы есептеу.
3. Таңдауды бөлу функциясын құру
4. Математикалық күту мен дисперсияның бейтарап бағалауларын табыңыз.

Шешуі:

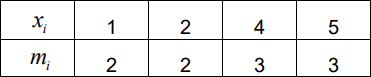
Тапсырмада n =10 таңдама көлемі берілген.

1) Таралу көпбұрышы -

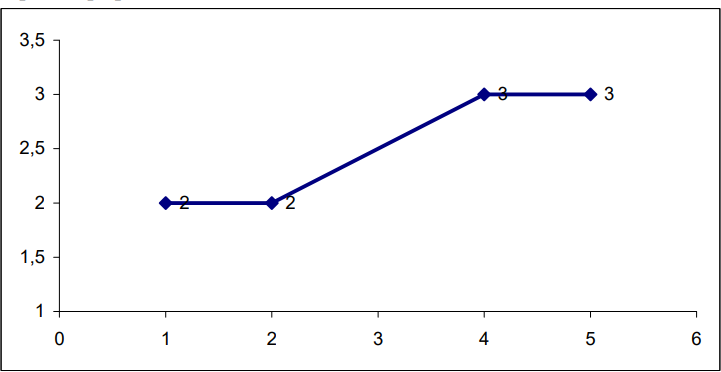
бастап

*mi* вариантының абсолютті жиілігіне тәуелділігі

*xi* опциясының мәндері

Бұл қатынасты кесте түрінде беруге болады:

Жиілік графигін саламыз:



Таңдамалы ортаны, дисперсияны, режимді, медиананы есептейік. Орташа үлгі:



Таңдамалы дисперсия



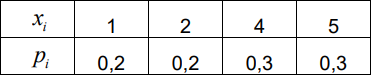
Стандартты ауытқу үлгісі:



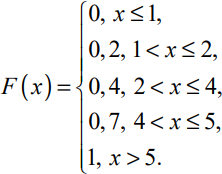
Режим ең жоғары жиіліктегі нұсқаға тең: *xMo*  4;5

Медиана орташа таңдау нұсқасына тең: *xMe*  4 .

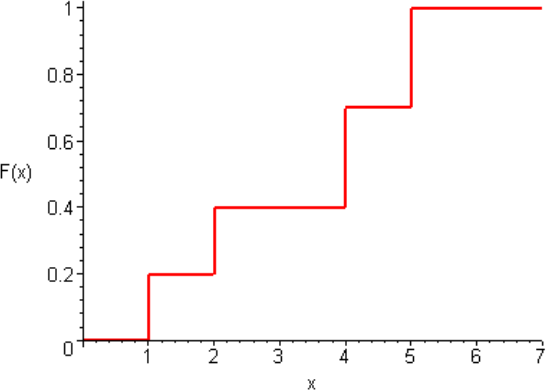
Таңдаудың таралу функциясы дискретті таралу функциясына ұқсас кездейсоқ шама. Оны табу үшін іріктеменің таралу қатарын жазамыз, мұнда

*xi* нұсқаның салыстырмалы жиілігі.

Онда



Графигін құрайық



Математикалық күтудің бейтарап бағасы таңдамалы орташа мәнмен бірдей: 

Дисперсияны объективті бағалау іріктеме дисперсиясынан айтарлықтай ерекшеленеді:

1. Салық органдары зерттеген халықтың үлкен тобынан кездейсоқ

10 адам таңдап алынды және олардың өткен жылдағы табысы туралы

мыңдаған рубльмен ақпарат жиналды: x1 , x2 , .... x10 , , іріктеменің орташа мәнін,

таңдауды табыңыз. дисперсия, түзетілген таңдау дисперсиясы. Топтағы кірістердің бөлінуін қалыпты деп есептей отырып және оның параметрлері ретінде іріктеменің орташа мәнін және түзетілген таңдау дисперсиясын пайдалана отырып, топты

1. Жалпы жиынтықтан n өлшемді үлгі алынады. Таңдаудың орташа мәнін, таңдау дисперсиясын, үлгінің стандартты ауытқуын, түзетілген таңдау дисперсиясын, вариация коэффициентін, режимді және медиананы табыңыз.

10,5 11 11,5 12 12,5 13 13,5

2 18 40 25 6 5 4

1. Таңдама берілген. Табу керек:

а) Жиілік үлестірімінің статистикалық қатарын және жиілік көпбұрышын құру;

б) Вариациялық қатар;

в) Математикалық күту мен дисперсияның бағасын табу;

г) Үлгі модасын, медиананы, вариация коэффициентін, асимметрия коэффициентін табыңыз.

10,20,20,5,15,20,5,10,20,5.

1. Қаланың дүкендеріне іріктеп зерттеу жүргізілді. Бізде қаладағы 50 дүкеннің тауар айналымының құны туралы келесі мәліметтер бар ( xi – тауар айналымы, миллион рубль; n i – дүкендер саны).



Табу керек:

а) орташа, стандартты ауытқу S және V коэффициенті; б) гистограмма мен жиіліктер көпбұрышын салу.

1. 20 000 адам тұратын қала халқының табысын зерттеу. бірқатар тұрғындар қайталанбайтын іріктеу схемасы бойынша таңдалды. Ай сайынғы табыстары бойынша тұрғындарды келесідей бөлу алынды (нұсқалар кестесін қараңыз).

Гистограмманы, көпбұрышты және салыстырмалы жиіліктердің кумулятын тұрғызыңыз.

Шынайы орташа табыстың іріктеме бойынша орташа табыстан 45 с.у.- ден аспайтын айырмашылығының ықтималдығын табыңыз. (абсолюттік мәнде).

Табыс 0,99 ықтималдылықпен жасалатын шекараларды анықтаңыз.

Бірдей шекаралардың ықтималдығы 0,9973 болатынына кепілдік берілген іріктеме өлшемін табыңыз.

1. Белгілі бір шамадағы 7 өлшеу деректері негізінде өлшеу нәтижелерінің орташа мәні 30-ға тең және таңдама дисперсиясы 36-ға тең болды. Өлшенетін шаманың шынайы мәні 0,99 сенімділікпен қамтылған шекараларды табыңыз.
2. Біртекті 500 тауардың партиясынан кездейсоқ қайталанбайтын іріктеу сұлбасы бойынша салыстырып тексеру үшін 70 тауар таңдалды, оның ішінде 56 тауар ақауы жоқ. Бүкіл партиядағы ақауы бар тауардың үлесі үлгідегі алынған пропорциядан 0,02-ден аспайтын (абсолюттік құн бойынша), сондай-ақ бүкіл партиядағы ақауы бар тауардың үлесі қамтылған шекараларды анықтау ықтималдығын табыңыз. сенімділігі 0,96.
3. Құрылыс компаниясы клиенттер үшін орындалған жөндеудің орташа құнын есептегісі келеді. Пилоттық сауалнама нәтижелерінің стандартты ауытқуы 850 АҚШ долларын құраса, ал іріктеудің шекті қатесі 200 АҚШ долларынан аспауы керек болса, құрылыс компаниясының 1200 клиенті арасында іріктеу мөлшері қандай болуы керек. 0,95 ықтималдығымен?
4. Мына есепті шешу керек:

* Интервалды тарату қатарын құру, әрбір интервал үшін жергілікті және жинақталған жиіліктерді есептеу, вариациялық қатарды құру.
* Көпбұрыш пен гистограмма құрастыру.
* іріктеменің орташа мәнін, сонымен қатар ең төменгі және ең жоғары жартылай ортаны, режим мен медиананы, дисперсия мен стандартты ауытқуды, вариация коэффициентін анықтау.
* 0,05 мәнділік деңгейінде Пирсон және Смирнов сәйкестік сынамалары арқылы сәйкес белгінің қалыпты таралу гипотезасын тексеру.
* жалпы орта және стандартты ауытқудың нүктелік және интервалдық бағалауларын табу (сенімді ықтималдықпен P = 0,95.
* іріктеу бағалауларының қателерін табу.
* барлық есептелген статистикалық көрсеткіштерді талдау.

Тапсырма: 11-70 шаруашылық, 80 шаруа қожалығы бойынша орташа жылдық сүт өнімділігі туралы мәліметтерді өңдеу.

**Мұғалімге арналған әдебиеттер тізімі**

1. Лютикас В.С.Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. М.:Просвещение, 2007
2. Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика. М.:Высшая школа
3. Шипачев В.С. Начала высшей математикеМ.: Дрофа, 2003
4. Соломоник В.С. Сборник вопросов и задач по математике. М.: Высшая школа, 1978
5. Учебно-методическая газета «математика», -Изд.:Первое сентября,№17, 2007
6. В.В.Киберев. Теория вероятности с элементами комбинаторики.Улан- Удэ. Издательство БГУ.,2006